

**UNIVERSIDADE ALTO VALE DO RIO DO PEIXE - UNIARP
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL**

LEONARDO JOSE PATRICIO

**UTILIZAÇÃO DE MÉTODO COMPUTACIONAL PARA AUXÍLIO NA
IDEALIZAÇÃO E CÁLCULO ESTRUTURAL**

**CAÇADOR
2017**

LEONARDO JOSE PATRICIO

**UTILIZAÇÃO DE MÉTODO COMPUTACIONAL PARA AUXÍLIO NA
IDEALIZAÇÃO E CÁLCULO ESTRUTURAL**

Trabalho de conclusão de curso apresentado como exigência para a obtenção do título de Bacharel, do Curso de Engenharia Civil, ministrado pela Universidade Alto Vale do Rio do Peixe – UNIARP, sob orientação do professor Me. Alysson Rodrigo Marques Gomes de Assis.

**CAÇADOR
2017**

UTILIZAÇÃO DE MÉTODO COMPUTACIONAL PARA AUXÍLIO NA IDEALIZAÇÃO E CÁLCULO ESTRUTURAL

LEONARDO JOSE PATRICIO

Este trabalho de conclusão de curso foi submetido ao processo de avaliação pela banca examinadora para a obtenção do título de:

Bacharel em Engenharia Civil

E aprovada na sua versão final em 28/11/2017, atendendo às normas da legislação vigente da Universidade Alto Vale do Rio do Peixe e Coordenação do curso de Engenharia Civil.

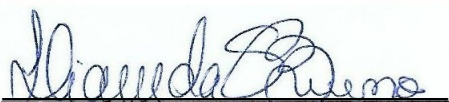


Dra. Liane da Silva Bueno

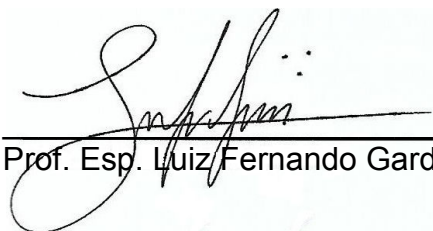
BANCA EXAMINADORA:



Prof. Me. Alysson Rodrigo Marques Gomes de Assis



Prof. Dra. Liane da Silva Bueno



Prof. Esp. Luiz Fernando Gardini

RESUMO

O presente trabalho foi elaborado com o intuito de descrever uma rotina de cálculo envolvendo aspectos da análise estrutural com operações matemáticas através de métodos matriciais de análise, como o método dos deslocamentos e método dos elementos finitos, a fim de encontrar funções através das quais possa-se analisar qualquer estrutura, encontrando as incógnitas buscadas. Após pesquisar informações em livros, dissertações, teses, entre outros, buscou-se a implantação dos conceitos encontrados para a criação de matrizes de rigidez nos sistemas local e global e a definição das matrizes geradas pelas funções, implantadas no computador e calculadas em um software de cálculo livre através do qual é possível obter a solução rapidamente e de forma mais eficiente.

Palavras-chave: Análise matricial. Elementos finitos. Modelagem computacional.

ABSTRACT

The present work was elaborated with the intention of describing a routine of calculation involving aspects of the structural analysis with mathematical operations through matricial analysis methods, such as the method of the displacements and finite element method in order to find functions through which one can analyze any structure, finding the unknowns sought. After searching information in books, dissertations, theses, among others, sought implement the concepts found for the creation of rigidity matrices in the local and global systems and the definition of the matrices generated by the functions, implanted in the computer and calculated in a free calculation software through which you can get the solution quickly and more efficiently.

Keywords: Matrix analysis. Finite elements. Computational modeling.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Representação de uma estrutura e suas forças em um diagrama linear .	11
Figura 2 – Tipos de apoio.....	14
Figura 3 – Exemplo de diagrama de esforço cortante e de momento fletor	19
Figura 4 - Representação de um sistema de coordenadas em um pórtico plano.....	23
Figura 5 – Viga exemplo para método da flexibilidade.....	24
Figura 6 – Exemplo de viga com mais de três redundantes.....	26
Figura 7 – Representação do alongamento produzido numa mola por uma força P.	28
Figura 8 – Exemplo de viga bi apoiada com seus deslocamentos	29
Figura 9 – Exemplo de viga para encontrar os coeficientes k	31
Figura 10 – Elemento de viga sujeito a flexão.....	31
Figura 11 – Quadro com a convenção de sinais	32
Figura 12 – Viga hiperestática para determinação dos coeficientes de rigidez.....	35
Figura 13 – Funções de interpolação do elemento finito de viga	37
Figura 14 – Pórtico plano para encontrar coeficientes na matriz de rigidez.	45
Figura 15 – Pórtico adotado para análise no Octave (2016)	56
Figura 16 - Viga exemplo para uso no octave	59
Figura 17 – Representação no sistema de coordenadas	60
Figura 18 – Diagramas de tensões e deformações para flexão simples	64
Figura 19 - Domínios de estado-limite último de uma seção transversal	66
Figura 20 – Detalhamento da seção da viga	70
Figura 21 – Pilar para análise inicial.....	75
Figura 22 – Pórtico 3d no Eberick	81
Figura 23 – Diagrama de momento fletor (viga engastada) no Eberick	82
Figura 24 - Diagrama de momento fletor (viga rotulada) no Eberick	83
Figura 25 – Detalhamento da Viga 1 no Eberick	84
Figura 26 – Detalhamento da Viga 2 no eberick	86
Figura 27 – Seção do pilar obtida com o Eberick	89

LISTA DE ABREVIATURAS

ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas

E – Módulo de Elasticidade

ELS – Estado Limite de Serviço

ELU – Estado Limite Último

Fcd – Resistência de Cálculo do Concreto à Compressão

Fck – Resistência Característica do Concreto à Compressão

Fyd – Resistência de Cálculo ao escoamento do aço

Fyk – Resistência Característica ao escoamento do aço

I – Momento de Inércia

i – Linha em uma matriz

j – Coluna em uma Matriz

K – Coeficiente de Rigidez

M – Momento Fletor

MEF – Método dos Elementos Finitos

Mpa – Megapascal

N – Esforço Normal

NBR – Norma Brasileira Regulamentadora

Rd – Resistência de Cálculo

Sd – Solicitação de Cálculo

V – Esforço Cortante

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
2	DESENVOLVIMENTO	10
2.1	REFERENCIAL TEÓRICO.....	10
2.1.1	Análise Estrutural	10
2.1.1.1	Elementos estruturais	12
2.1.1.2	Condições dos apoios	13
2.1.1.3	Ações externas ativas.....	15
2.1.1.4	Ações reativas	16
2.1.1.5	Solicitações.....	17
2.1.2	Dimensionamento, Verificação e Detalhamento	20
2.1.2.1	Métodos de cálculo	21
2.1.3	Análise Matricial de Estruturas.....	22
2.1.3.1	Método das forças (ou da flexibilidade)	24
2.1.3.1.1	Matriz de flexibilidade e vetor dos termos de carga.....	27
2.1.3.2	Método dos deslocamentos (ou da rigidez)	27
2.1.3.3	Matriz de rigidez de um elemento	32
2.1.4	Método Dos Elementos Finitos.....	35
2.1.4.1	Montagem de uma matriz em um pórtico plano.	44
2.1.5	Modelagem Computacional.....	51
2.2	MATERIAIS E MÉTODOS	55
2.2.1	Gnu Octave	56
2.2.2	Metodologia para a Análise.....	56
2.3	APRESENTAÇÃO, ANÁLISE DOS DADOS E RESULTADOS.....	58
2.3.1	Dimensionamento da Viga.....	59
2.3.2	Dimensionamento dos Pilares	72
2.3.3	Comparação de Resultados	80
2.3.3.1	Viga 1	83
2.3.3.2	Viga 2	85
2.3.3.3	Pilares	86
3	CONCLUSÃO	91
	REFERÊNCIAS	93

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho trata sobre o uso do auxílio computacional para o dimensionamento de elementos em concreto armado.

Os elementos de concreto armado de acordo com a NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – ABNT, 2014, p.3): “[...] são aqueles cujo comportamento estrutural depende da aderência entre concreto e armadura, e nos quais não se aplicam alongamentos iniciais das armaduras antes da materialização dessa aderência”.

Para que esses materiais trabalhem juntos e em conformidade com as condições de estado limite último e estado limite de serviço, é necessário fazer o correto dimensionamento da estrutura.

“O Cálculo, ou dimensionamento, de uma estrutura deve garantir que ela suporte, de forma segura, estável e sem deformações excessivas, todas as solicitações a que estará submetida durante sua execução e utilização” (CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2015, p. 46).

Um dos formatos para se resolver esses procedimentos de cálculo, é montar modelos matemáticos para representar essas estruturas através da técnica da discretização, que segundo Carvalho e Figueiredo Filho (2015, p. 25): “[...] consiste em desmembrar essas estruturas em elementos cujos comportamentos possam ser admitidos, conhecidos e de fácil estudo”.

Contudo, esse procedimento feito manualmente pode levar longos prazos para ser executado, devido à complexidade e ao elevado número de parâmetros e análises a serem consideradas na maioria das vezes.

Com esse problema, veio a necessidade da implantação de métodos que resolvessem esses cálculos de forma mais rápida e com a mesma certeza de estar calculando corretamente. Muitos softwares foram desenvolvidos para essa finalidade, contudo é um conhecimento que muitas vezes é de difícil acesso ou precisa ser remunerado para se ter em seu computador.

E com a popularização dos computadores veio a pergunta: será que nós podemos criar modelos computacionais de cálculo para analisar e dimensionar estruturas e garantir que os resultados obtidos possam ser confiáveis?

A modelagem computacional pode fornecer diversas informações que os métodos analíticos não são capazes. Esta técnica surgiu a partir da metade do século XX e se propagou logo em seguida com a popularização dos computadores. Diversos métodos matemáticos utilizados na engenharia foram implementados em códigos e processados nos computadores, destacando-se o Método das Diferenças Finitas, o Método dos Elementos de Contorno e principalmente o Método dos Elementos Finitos (MEF) (SARTURI, 2014, p.24).

Desde o surgimento dos métodos de cálculo para estruturas, buscou-se sempre meios para facilitar os procedimentos desses métodos com o propósito de minimizar o trabalho e o tempo gasto com os cálculos. Com a invenção do computador e dos sistemas operacionais, veio também a facilidade de acesso as informações além de meios para cumprir esse propósito.

Surge então, como proposta desse trabalho, o estudo para a criação de um modelo matemático em um software livre, GNU Octave para o cálculo das mais diversas situações decorrentes em uma estrutura em concreto armado.

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver um sistema capaz de calcular e otimizar as dimensões em diferentes sistemas estruturais, variando sistematicamente as condições das estruturas com o auxílio computacional.

Sendo os objetivos específicos:

- Fazer uma referência na literatura para desenvolver o código computacional;
- Criar uma rotina de cálculo que associe aspectos do dimensionamento do concreto armado e da análise matricial de estruturas;
- Realizar os cálculos e otimizar as dimensões em diferentes sistemas estruturais
- Comparar os resultados obtidos no dimensionamento pelo método criado em GNU Octave 4.2.0 (2016) com os encontrados por um software comercial, onde, para este trabalho, foi escolhido o software da Alto Qi, Eberick V8 gold (2013).

A metodologia utilizada foi a pesquisa bibliográfica de caráter qualitativo, através de livros, dissertações e teses, para a posterior aplicação dos conceitos no software computacional fazendo também um estudo de caso em uma determinada situação de estrutura.

2 DESENVOLVIMENTO

Nesta etapa do trabalho serão apresentados o referencial teórico com a opinião de alguns autores com trabalhos publicados, bem como a metodologia e o material a serem empregados para se alcançar os objetivos, além de uma análise em um software comercial, para a comparação de resultados.

2.1 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, serão apresentados conceitos de alguns autores para enriquecer o conteúdo acerca do tema apresentado.

2.1.1 Análise Estrutural

Para se iniciar o dimensionamento de uma estrutura é necessário fazer antes a análise da mesma, definindo as ações aplicadas, e encontrando as reações, deformações e deslocamentos provocados por essas ações.

Em análise de estruturas determina-se matematicamente, através de sistemas físicos capazes de receber e transmitir esforços, o comportamento dos elementos estruturais, para que se possa verificar o dimensionamento de seus componentes (SORIANO, 2014).

Quando se aplica cargas em uma estrutura ela tende a se deformar. Por ela se deformar, são produzidas diversas forças nos elementos que a compõe. O cálculo dessas forças e das deformações que as causaram é conhecido por análise estrutural (MCCORMAC, 2015).

Segundo Soriano (2014), a análise das estruturas, devido à grande amplitude de seus métodos e aplicações, pode ter seu conteúdo dividido em diversas disciplinas ao longo do curso de graduação em engenharia dificultando a percepção do aluno acerca da integração entre suas partes.

Segundo Moreira (1977), o problema da análise estrutural envolve quatro tipos de grandeza: as ações mecânicas aplicadas; as ações mecânicas internas; os deslocamentos dos pontos na estrutura e as deformações.

A análise estrutural fundamenta-se em princípios da estática dos corpos rígidos onde inicialmente, em estática das estruturas, podemos determinar esforços reativos

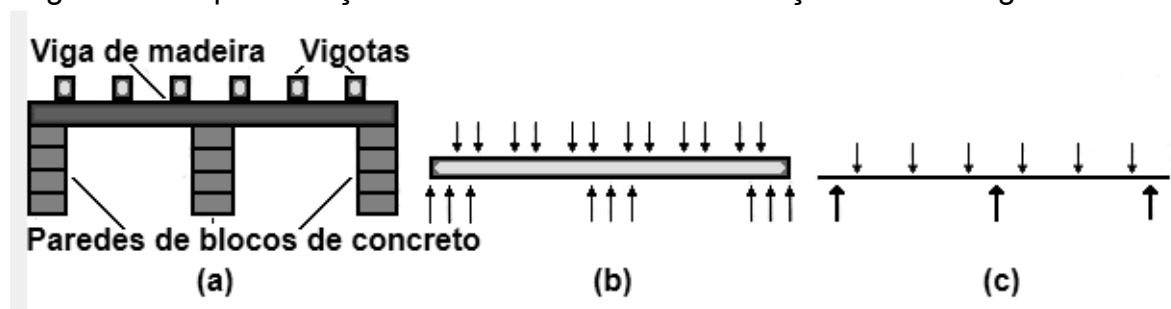
e esforços internos em estruturas compostas por barras em que são suficientes apenas as equações de equilíbrio da estática. Em sequência, na resistência dos materiais são feitas as verificações de tensões e deformações nas mesmas. Em hiperestática são definidos, além dos esforços reativos e internos, os deslocamentos, ambos considerando as deformações das barras, onde apenas as equações de equilíbrio não são suficientes. A análise matricial das estruturas também trata dos deslocamentos, esforços reativos e esforços seccionais das estruturas constituídas de barras, só que usando formulação matricial (SORIANO, 2014).

Segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014, p. 81) em seu item 14.2.1, “o objetivo da análise estrutural é determinar os efeitos das ações em uma estrutura, com a finalidade de efetuar verificações dos estados-limites últimos e de serviço”.

Para calcular as forças nas várias partes de uma estrutura de maneira mais simples e com alguma precisão, é necessário representar a estrutura de uma maneira simples e que seja útil para a análise. Esse processo de substituir uma estrutura real por um sistema simples adequado para análise é chamado idealização estrutural. Normalmente, o esquema de uma estrutura idealizada é chamado de diagrama linear, como representado nas Figura 1 (MCCORMAC, 2015).

O modelo estrutural pode ser idealizado como a composição de elementos estruturais básicos, formando sistemas estruturais resistentes que permitam representar de maneira clara todos os caminhos percorridos pelas ações até os apoios da estrutura e também deve representar a geometria dos elementos estruturais, os carregamentos atuantes, as condições de contorno, as características e respostas dos materiais, sempre em função do objetivo específico da análise (NBR 6118, ABNT, 2014).

Figura 1 – Representação de uma estrutura e suas forças em um diagrama linear



Fonte: McCormac, 2015

Embora o uso de simples diagramas lineares para analisar estruturas não obtenha resultados perfeitos, normalmente esses são bem aceitáveis. No entanto, algumas vezes pode restar alguma dúvida quanto ao diagrama linear ou o modelo exato a ser utilizado para se analisar uma determinada estrutura (MCCORMAC, 2015).

“Uma simplificação usualmente adotada é considerar a estrutura dividida em partes de comportamentos isolados, com a transmissão de esforços entre essas partes” (SORIANO, 2014, p. 58).

Deve-se dimensionar as estruturas de modo que não apresentem falhas nem deformem excessivamente sob quaisquer condições de carregamento. Os elementos devem ser projetados com uma capacidade maior do que a exigida para suportar as cargas de serviço previstas (cargas reais ou cargas especificadas pelas normas técnicas de projeto) (LEET; UANG; GILBERT, 2009).

2.1.1.1 Elementos estruturais

Segundo Carvalho e Figueiredo Filho (2015, p.23), “elementos estruturais são peças geralmente com uma ou duas dimensões preponderantes sobre as demais (vigas, pilares, lajes, etc.) que compõe uma estrutura. O modo como são arranjados pode ser chamado de sistema estrutural”.

Soriano (2014), diz que os sistemas estruturais podem ser classificados em estruturas em barras (ou estrutura reticulada), quando é constituída de componentes estruturais com uma direção preponderante as demais, como vigas, por exemplo, e estruturas contínuas, quando possuem mais de uma direção preponderante, a exemplo de lajes e blocos de fundação.

Todos os sistemas estruturais são constituídos de componentes. Sendo componentes elementares de uma estrutura: tirantes, sujeitos apenas a esforços axiais de tração; escoras e colunas; sujeitos principalmente a esforços axiais de compressão; vigas, sujeitas a esforços principalmente de flexão e diafragmas, que são usados normalmente para resistir a esforços transversais à estrutura (MCCORMAC, 2015).

Para que se possa aplicar os conhecimentos da teoria das estruturas faz-se algumas simplificações: admite-se que vigas são apoios indeslocáveis na direção vertical para as lajes; que os pilares são apoios indeslocáveis na vertical para as vigas,

e são considerados, simplificadaamente, como bi rotulados em suas extremidades, que as lajes são engastadas ou simplesmente apoiadas nas vigas, que as cargas são uniformemente distribuídas, etc (CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2015).

Uma vez entendendo o comportamento e a função dos vários componentes das estruturas tridimensionais, o projetista pode simplificar a análise da estrutura real, subdividindo-a em subsistemas bidimensionais menores que atuam como vigas, treliças ou pórticos (LEET; UANG; GILBERT, 2009).

Vigas são elementos com um eixo bem definido, um modelo estrutural em que as barras estão todas no mesmo eixo (MARTHA, 2010).

Uma treliça é uma estrutura composta por um grupo de elementos ligados entre si na forma um ou mais triângulos (MCCORMAC, 2015).

Pórticos são elementos estruturais compostos de vigas e colunas conectadas por ligações rígidas. O ângulo entre vigas e colunas normalmente é de 90° . Os pórticos podem consistir em uma única coluna e viga ou, como em um prédio de vários andares, de muitas colunas e vigas (LEET; UANG; GILBERT, 2009).

Os pórticos podem ser planos ou espaciais. Pórtico plano é um modelo de estrutura constituída de barras retas ou curvas situadas em um plano usualmente vertical de maneira que as ações que o solicitam provoquem apenas esforço normal, cortante e momento fletor de vetor representativo normal no mesmo plano enquanto em um pórtico espacial as barras podem ter qualquer posição e submetidas a qualquer um dos 6 esforços seccionais (SORIANO, 2014).

2.1.1.2 Condições dos apoios

Os apoios representam as condições de suporte nos pontos de contato externo, para cada restrição de apoio existe uma reação de apoio associada. As reações de apoio são as forças e os momentos que representam os efeitos das ações externas sobre o modelo estrutural (MARTHA, 2010).


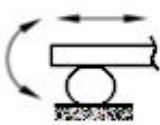
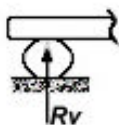
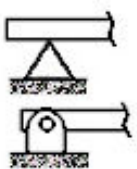

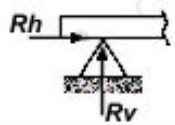
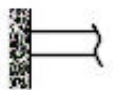

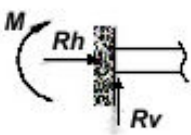
Segundo Soriano (2014, p. 65):

Assim como um corpo rígido livre no espaço tem 6 graus de liberdade, cada seção transversal da barra pode ter três componentes de deslocamento de translação e três rotações, referidos genericamente como deslocamentos. Esses deslocamentos, em todo ou em parte, podem ser restringidos por vínculos de apoios, quando então, segundo os deslocamentos restringidos

ocorrem esforços reativos dos apoios sobre a estrutura, denominados reações de apoio.

Na Figura 2 estão representados os principais tipos de apoio, suas denominações, o sentido das reações que eles produzem e o sentido onde possuem deslocamentos livres (graus de liberdade).

Figura 2 – Tipos de apoio

APOIO	SIMBOLOGIA	GRAUS DE LIBERDADE	REAÇÕES
MÓVEL			
FIXO			
ENGASTE			

Fonte: Slideshare, 2017

A análise dos apoios mostra que há três componentes desconhecidas das reações em um apoio do terceiro gênero (engaste), dois em um de segundo gênero (articulação) e um em um de primeiro gênero (barra de ligação ou rolete) (MCCORMAC, 2015).

“O sistema de apoios escolhido pelo projetista influenciará as forças que se desenvolverão em uma estrutura e também as forças transmitidas para os elementos de apoio” (LEET; UANG; GILBERT, 2009, p.81).

“Para efetuar a análise de uma estrutura, além do pré-dimensionamento geométrico de todos os seus componentes, das propriedades de material e das condições de apoio, é necessário estabelecer a priori as ações externas ativas” (SORIANO, 2014, p.63).

2.1.1.3 Ações externas ativas

Esta etapa da análise consiste em definir as ações que vão atuar na estrutura para que esta seja projetada adequadamente.

As ações são os carregamentos provocados pela disposição dos esforços nas estruturas, que devem ser classificadas e quantificadas de modo a garantir que a estrutura em questão seja projetada para se obter a resistência necessária.

Para Carvalho e Figueiredo Filho (2015, p. 53):

Denomina-se ação qualquer influência, ou conjunto de influências, capaz de produzir estados de tensão ou de deformação em uma estrutura. [...] na análise estrutural deve ser considerada a influência de todas as ações que possam produzir efeitos significativos para a segurança da estrutura em exame, levando-se em conta os possíveis estados últimos e os de serviço.

O engenheiro deve tomar muito cuidado ao prever as cargas prováveis que a estrutura deve suportar. Embora as cargas de projeto especificadas pela norma geralmente sejam satisfatórias para a maioria das construções, o projetista também deve decidir se essas cargas se aplicam a estrutura em questão. (LEET; UANG; GILBERT, 2009).

As cargas normalmente são classificadas em: cargas permanentes (g), que são constituídas pelo peso próprio da estrutura e pelo peso de todos os elementos construtivos fixos e instalações permanentes; e cargas acidentais (q), que é toda aquela que pode atuar sobre a estrutura de edificações em função do seu uso (NBR 6120, ABNT, 1980).

Segundo McCormac (2015), normas e especificações de fabricantes podem ser usadas para estimar as cargas.

“Os valores característicos das ações são estabelecidos em função da variação de suas intensidades. Para ações permanentes, esses valores estão definidos em normas específicas, como a ABNT NBR 6120;1980” (CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2015, p. 56).

É de responsabilidade do engenheiro estrutural, posicionar as cargas de forma que sejam causados os piores efeitos nos elementos da estrutura para a segurança da mesma (MCCORMAC, 2015).

As cargas acidentais e moveis seguem procedimentos diferentes dos procedimentos para ações permanentes. A principal razão é que para ações

permanentes, a transferência tem uma distribuição constante enquanto nas cargas acidentais e moveis a transferência varia em função da atuação das cargas (MARTHA, 2010).

Um carregamento é definido pela combinação de ações que tem probabilidades de atuarem simultaneamente na estrutura em um período pré-estabelecido. Todas as ações permanentes devem ser tomadas em sua totalidade e das ações variáveis devem ser tomadas apenas as que possuem efeito desfavorável em relação à segurança com seus respectivos coeficientes de ponderação dispostos na NBR 6118:2014 (CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2015).

2.1.1.4 Ações reativas

Após o estudo das ações que serão aplicadas na estrutura é necessário verificar as reações que serão provocadas nos apoios a fim de que se projetem apoios com a resistência adequada.

As ações reativas são aquelas que se desenvolvem nos vínculos externos ou apoios (SORIANO, 2014).

Para cada restrição de apoio, existe uma reação de apoio associada. Reações de apoio são as forças verticais ou horizontais e/ou os momentos de flexão ou torção que representam o efeito mecânico do meio externo sobre o modelo estrutural (MARTHA, 2010).

Para uma estrutura estar em equilíbrio, cada parte da estrutura também deve estar equilibrada. As equações de equilíbrio estático se aplicam a cada elemento do mesmo modo que se aplicam a estrutura inteira. Portanto é possível desenhar um diagrama, chamado de diagrama de corpo livre, de qualquer parte da estrutura e aplicar essas equações naquela parte, como por exemplo, para encontrar as reações nos apoios. (MCCORMAC, 2015).

Nesse diagrama, as colunas e vigas mestras são representadas pelas linhas centrais das barras reais (LEET; UANG; GILBERT, 2009).

“A análise linear, na maioria dos casos, deve ser realizada com o emprego de procedimento numérico adequado, como, por exemplo, diferenças finitas, elementos finitos ou elementos de contorno” (NBR 6118, ABNT, 2014, p.98).

De acordo com a terceira lei de newton, as reações de apoio têm a mesma intensidade das forças e momentos resultantes das ações atuantes na estrutura, mas

com sentidos opostos a essas ações. Essas ações são provenientes das solicitações e dependem da forma como a estrutura transfere essas cargas (MARTHA, 2010).

Se uma estrutura é considerada como estando em equilíbrio sob ação de um sistema de cargas, ela deve satisfazer as equações de equilíbrio estático, que num sistema cartesiano espacial, (x, y, z) podem ser escritas como: $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum F_z = 0$, $\sum M_x = 0$, $\sum M_y = 0$ e $\sum M_z = 0$. Ou como a maioria das estruturas são analisadas como estruturas planas (eixos x e y), pode se admitir as equações como: $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ e $\sum M = 0$ (MCCORMAC, 2015).

Essas equações servem para nos dizer que a resultante do sistema de forças atuantes sobre a estrutura é nula e que o momento resultante em relação a um ponto qualquer nela também é nulo. Com essas equações determinam-se as reações de apoio (SORIANO, 2014).

2.1.1.5 Solicitações

“Determina-se solicitação (ou esforço solicitante) qualquer esforço (momento fletor, esforço cortante, esforço normal) ou conjunto de esforços decorrentes das ações e aplicados a uma ou mais seções de um elemento da estrutura” (CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2015, p.63).

Com o objetivo de definir os esforços seccionais (solicitações), considera-se uma barra reta em equilíbrio sob forças externas, na qual se indica uma seção reta que divide a barra em duas partes, idealiza-se seu eixo geométrico e considera-se as forças aplicadas no eixo (SORIANO, 2014).

Quando as cargas são aplicadas e uma estrutura, esta tem uma reação de acordo com as cargas. As forças em um elemento dependem em geral do valor das cargas que atuam na estrutura e do local onde elas estão aplicadas (MCCORMAC, 2015).

Para projetar uma viga, por exemplo, o engenheiro deve construir os diagramas de esforço cortante e momento fletor para determinar o local e a magnitude dos valores máximos dessas solicitações. A não ser em vigas curtas e pesadamente carregadas, cujas dimensões são controladas pelos requisitos de esforço cortante, as proporções da seção transversal são determinadas pela magnitude do momento máximo no vão. Após a seção ser dimensionada no ponto de momento máximo, o

projeto é concluído verificando-se se as tensões de cisalhamento no ponto de cortante máximo — normalmente próximo aos apoios — são iguais ou menores do que a resistência ao cisalhamento permitida pelo material. Por fim, as deflexões produzidas pelas cargas de serviço devem ser verificadas para garantir que a peça tenha rigidez adequada. Os limites da deflexão são definidos por normas como a NBR 6118:2014 (LEET; UANG; GILBERT, 2009)

Na ABNT NBR 6118:2014 as solicitações de cálculo são obtidas para a combinação de ações considerada, de acordo com a análise estrutural, e para cada estado limite considerado, ou seja, as ações é que são majoradas, sendo então determinadas as solicitações (CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2015, p.64).

Os esforços internos de um quadro plano estão associados ao seu comportamento plano. Por exemplo, em uma barra de pórtico plano existem apenas três esforços, definidos nas direções dos eixos locais, são eles: esforço normal (N) ou esforço axial (longitudinal), esforço cortante (V) ou esforço interno transversal (cisalhamento), e momento fletor (M) ou esforço interno de flexão (MARTHA, 2010).

Esforço cortante é definido como a soma algébrica das forças à esquerda ou à direita de uma seção perpendicular ao eixo do elemento e momento fletor é a soma algébrica dos momentos relacionados de todas as forças à esquerda ou à direita de uma seção transversal em particular (MCCORMAC, 2015).

Ao contrário do esforço cortante, o esforço normal em cada seção transversal é a soma algébrica das forças na direção do eixo da barra (e não perpendicular como o esforço cortante), situadas ao lado esquerdo ou direito da seção (SORIANO, 2014).

Em forças concentradas, que são a idealização de força distribuída em pequena superfície de contato ou em pequeno volume, através de sua resultante, uma simplificação é a descontinuidade de esforço cortante, já em forças transversais distribuídas por unidades de comprimento, a resultante dessa força entre duas seções transversais é igual a alteração do seu esforço cortante (SORIANO, 2014).

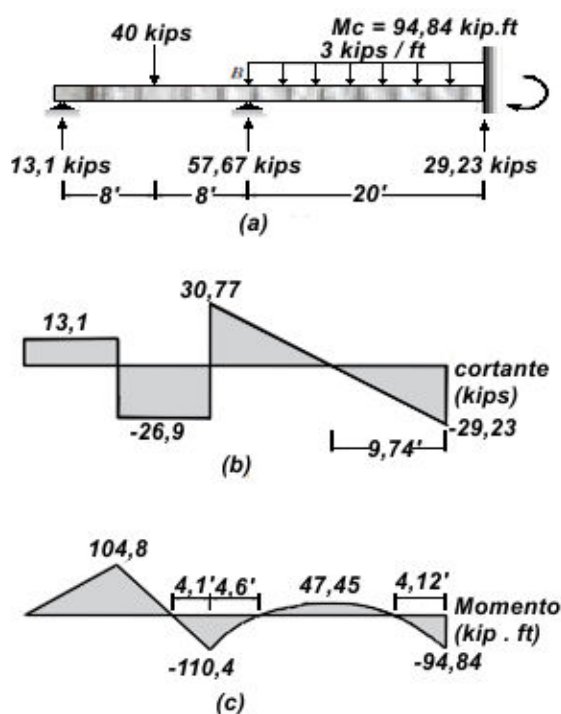
Em forças inclinadas é usada a componente dessa força, perpendicularmente ao eixo da barra, de acordo com o ângulo de incidência da mesma, para se desenhar os diagramas de momento fletor e esforço cortante (MCCORMAC, 2015).

Para representar graficamente esses esforços, são construídos diagramas de esforço cortante e de momento fletor. Essas curvas, que preferencialmente devem ser desenhadas em escala, consistem em valores de cortante e momento plotados como

ordenadas em relação à distância ao longo do eixo da viga. Embora se possa construir curvas de cortante e de momento cortando corpos livres em intervalos ao longo do eixo de uma viga e escrever equações de equilíbrio para estabelecer os valores de cortante e momento em seções específicas, é muito mais simples construir essas curvas a partir das relações básicas existentes entre carga, cortante e momento (LEET; UANG; GILBERT, 2009)

Na Figura 3, temos um exemplo de viga representada como barra e seus diagramas de esforço cortante e momento fletor de acordo com as ações exercidas sobre a estrutura e as reações obtida nos apoios.

Figura 3 – Exemplo de diagrama de esforço cortante e de momento fletor



Fonte: Leet, Uang e Gilbert, 2009

A variação do momento fletor entre dois pontos em uma estrutura é igual ao esforço cortante entre esses pontos vezes a distância entre os mesmos, portanto a variação do momento fletor é igual a área do diagrama entre os pontos (MCCORMAC, 2015).

O esforço cortante é a derivada do momento fletor, portanto para se encontrar o ponto máximo de momento fletor na barra, basta encontrar a seção na qual o esforço cortante se anula (MARTHA, 2010).

Os diagramas dos esforços seccionais são úteis no projeto em estrutura, pois permitem a verificação desses esforços ao longo das barras, com a identificação de valores extremos, máximos e mínimos, dos mesmos. Esses valores são úteis no dimensionamento das barras e detalhamento das ligações entre as mesmas (SORIANO, 2014).

2.1.2 Dimensionamento, Verificação e Detalhamento

“O objetivo dessas três etapas (dimensionamento, verificação e detalhamento), que se desenvolvem logo após a análise estrutural, é garantir segurança, em relação aos estados-limites últimos (ELU) e de serviço (ELS), das estruturas como um todo e de cada uma de suas partes” (NBR 6118, ABNT, 2013, p. 114).

Para que esta segurança seja garantida, as resistências e as solicitações devem assumir valores de cálculo (R_d e S_d), e devem respeitar a condição R_d maior ou igual as S_d (CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2015).

O projetista da estrutura de uma edificação precisa fixar a resistência característica do concreto à compressão, ou seja, o F_{ck} do concreto, (YASIGI, 2009)

A NBR 6118 (ABNT, 2014) amplia o conceito de resistência de cálculo do concreto, que deve ser denominada de duas maneiras, em função da idade do concreto, quando se faz em data inferior a 28 dias ou quando se faz em 28 dias ou mais (CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2015).

Já para o aço de concreto armado, segundo Yasigi, (2009, p. 221):

Existem quatro categorias (CA-25; CA-40; CA-50 e CA-60) em função da resistência característica de escoamento (respectivamente 250 MPa; 400 MPa; 500 MPa e 600 MPa) e duas classes (A e B), sendo certo que a classe A abrange as barras simplesmente laminadas e a classe B, as barras encruadas (que sofreram processo de deformação a frio).

Para obras usuais e situações normais em geral, têm-se, para o concreto e aço no estado limite último, os valores de cálculo, respectivamente: $F_{cd} = F_{ck}/1,4$; $F_{yd} = F_{yk}/1,15$, onde, F_{cd} é a resistência à compressão de cálculo do concreto e F_{yd} a resistência à tração de cálculo do aço (CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2015).

Usando os resultados da análise dos projetos preliminares, o projetista recalcula as proporções dos principais elementos de todas as estruturas. Embora cada análise tenha sido baseada em valores de carga estimados, as forças

estabelecidas neste estágio provavelmente são indicativas do que uma estrutura em particular deve suportar; portanto, é improvável que as proporções mudem significativamente, mesmo depois que os detalhes do projeto final forem estabelecidos (LEET; UANG; GILBERT, 2009).

“Além de um arranjo estrutural que garanta segurança ao conjunto, devem ser aplicadas regras como as de dimensões mínimas para a definição das fôrmas, bem como as regras de detalhamento das armaduras” (NBR 6118, ABNT, 2013, p. 115).

2.1.2.1 Métodos de cálculo

Os métodos de cálculo das estruturas de concreto armado podem ser classificados, basicamente, em dois grupos: os métodos clássicos, ou das tensões admissíveis; e os métodos de cálculo na ruptura (CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2015).

Em geral, o objetivo é determinar os esforços e os deslocamentos, para atingi-lo o método clássico parte de elementos infinitesimais da estrutura exprimindo matematicamente e com simplicidade suas relações solicitação-deformação (MOREIRA, 1977).

Nestes métodos, são determinadas as solicitações correspondentes as cargas máximas de serviço, onde se calculam as tensões máximas correspondentes a essas solicitações, supondo um comportamento completamente elástico dos materiais, com as tensões máximas limitadas a uma fração da resistência dos materiais garantindo a segurança da estrutura porém, os métodos clássicos são métodos determinísticos, nos quais se consideram fixos os diferentes valores numéricos que servem de partida para o cálculo, em que as grandezas são empregadas com seus valores máximos levando a um superdimensionamento, com seu cálculo conduzindo a um mau aproveitamento dos materiais e também não fornecendo informação acerca da capacidade que a estrutura tem de receber mais carga, não sendo possível averiguar sua verdadeira margem de segurança. Já nos métodos de cálculo na ruptura, a segurança é garantida fazendo com que as solicitações devido a cargas majoradas sejam menores que as solicitações últimas, sendo estas as que levariam a estrutura a ruptura se os materiais tivessem suas resistências reais minoradas por coeficiente de ponderação das resistências (CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2015).

Os métodos de análise usam um conjunto de variáveis ou parâmetros para representar o comportamento da estrutura, o comportamento analítico do modelo estrutural é substituído por um comportamento discreto. Esse processo de passagem de um modelo matemático para um modelo discreto é denominado discretização (MARTHA, 2010).

Os métodos matriciais de análise fornecem uma linguagem matemática conveniente para descrever estruturas complexas e as manipulações matriciais necessárias podem ser realizadas facilmente por meio de computadores (MCCORMAC, 2015).

Exemplos numéricos simples até podem ser resolvidos mais rapidamente por métodos clássicos, mas a medida em que as estruturas se tornam complexas, os métodos matriciais se tornam mais úteis (MCCORMAC, 2015).

O computador é capaz de extraordinárias proezas matemáticas, contudo ele só realiza as tarefas por que são descritas por instruções precisas, simples e claras (MCCORMAC, 2015).

2.1.3 Análise Matricial de Estruturas

Qualquer método de análise que envolva equações de álgebra linear pode ser posto em notação matricial e usando operações com matrizes podem ser resolvidas. A possibilidade de aplicação de métodos matriciais pelo engenheiro estrutural é muito importante porque todas as estruturas, tanto elásticas linearmente quanto estaticamente determinadas ou indeterminadas, são governadas por sistemas de equações lineares (MCCORMAC, 2015).

A estrutura é decomposta em elementos que possam entrar em contato entre si nos pontos nodais (nós). Estes elementos podem ser planos ou espaciais, dependendo do caso. As forças e os deslocamentos dos pontos nodais não correspondem as forças e deslocamentos existentes nesses pontos: são fictícios e seus valores são obtidos pela compatibilização da energia de deformação. A solução é, neste caso, aproximada, mas converge para a solução exata quando se aumenta o número de elementos. O tratamento deste caso é objetivo do Método dos Elementos Finitos (MOREIRA, 1977).

Os métodos para análise de estruturas estaticamente indeterminadas podem ser divididos em duas classes: método das forças ou da flexibilidade e método dos

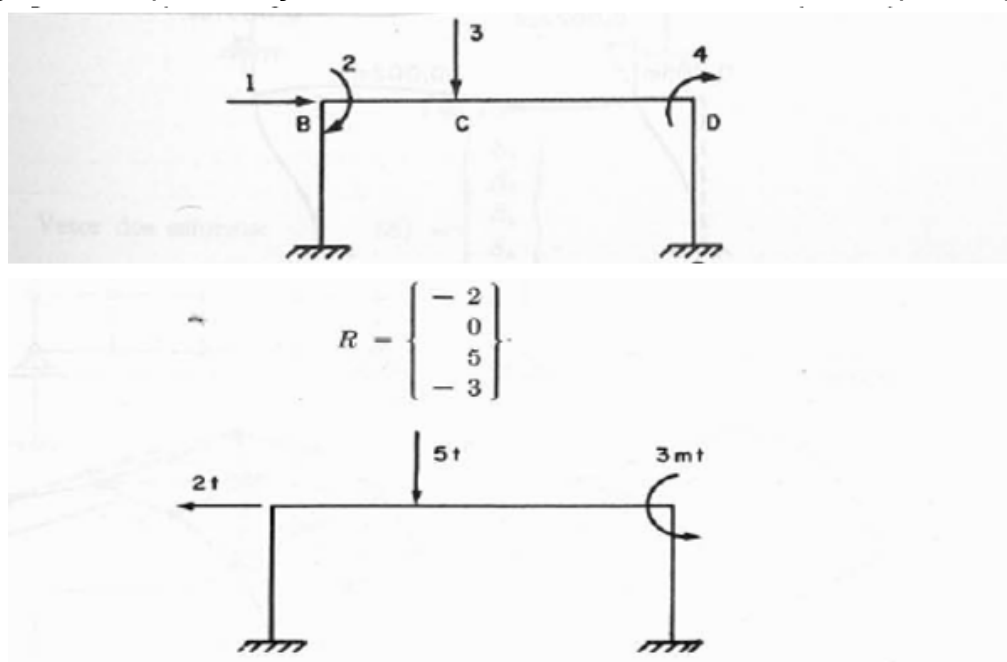
deslocamentos ou de rigidez. Ambos os métodos são desenvolvidos até um nível em que podem ser aplicados a quase todas as estruturas, porém os procedimentos através do método dos deslocamentos são mais utilizados pela maior facilidade de programação em computador (MCCORMAC, 2015).

“No método da flexibilidade, escrevemos equações de compatibilidade em termos de forças redundantes desconhecidas. No método da rigidez escrevemos equações de equilíbrio em termos de deslocamentos de nó desconhecidos” (LEET; UANG; GILBERT, 2009, p.660).

Com o fim de identificar e ordenar matricialmente as ações mecânicas (forças e momentos) e os deslocamentos (lineares ou angulares) existentes nos nós de uma estrutura integrada ou nas extremidades de um elemento - quando subdividida a estrutura -, impõe-se seja fixado primeiramente, um sistema de coordenadas (MOREIRA, 1977).

Como exemplo, na Figura 4, temos um pórtico em que se interessa assinalar as solicitações e deslocamentos, as setas indicam os sentidos que devem ser tratados como positivos. Na segunda parte da figura temos o vetor das forças nodais com os valores e o sinal representando seu sentido.

Figura 4 - Representação de um sistema de coordenadas em um pórtico plano



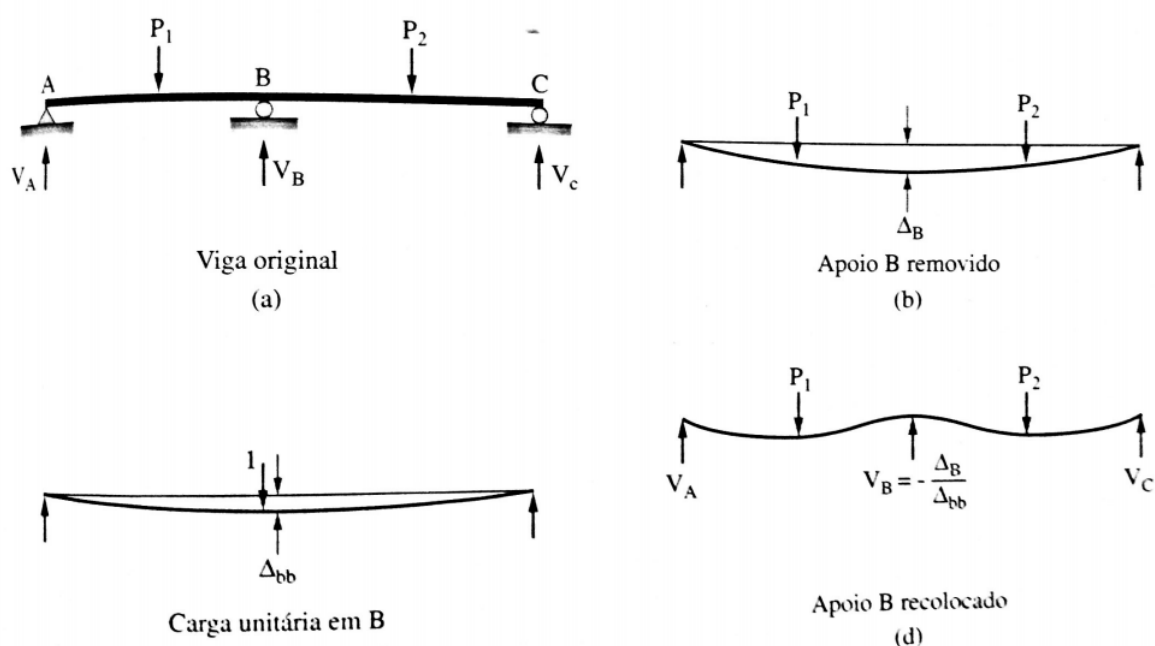
Fonte: Moreira, 1977

2.1.3.1 Método das forças (ou da flexibilidade)

O método da flexibilidade (método das forças), também chamado de método das deformações consistentes ou método da superposição é um procedimento para analisar estruturas indeterminadas, lineares e elásticas. Embora esse método possa ser aplicado na maioria das estruturas (vigas, treliças, pórticos, cascas etc.), o esforço computacional aumenta exponencialmente com o grau de indeterminação. Portanto, é mais atraente quando aplicado a estruturas com baixo grau de indeterminação (LEET; UANG; GILBERT, 2009).

O método das forças para a análise de estruturas estaticamente indeterminadas é também denominado com frequência como método da flexibilidade (ou método das deformações consistentes). Na Figura 5 é analisada uma viga continua com dois vãos para ilustrar as deformações consistentes. Esta estrutura estaticamente indeterminada (hiperestática), suporta as cargas P_1 e P_2 , que por sua vez é suportada pelos apoios A, B e C. A remoção do apoio B faria com que a viga se tornasse estaticamente determinada (isostática), isso significa que a estrutura original é indeterminada em primeiro grau. Com esse apoio removido é um problema simples encontrar o deslocamento vertical em B, Δ_B , causado pelas cargas externas (MCCORMAC, 2015).

Figura 5 – Viga exemplo para método da flexibilidade.



É um método clássico para analisar estruturas hiperestáticas que consiste em somar uma série de soluções básicas que satisfazem as condições de equilíbrio, mas não as condições de compatibilidade da estrutura original, para, na superposição reestabelecer essas condições (MARTHA, 2010).

Como etapa fundamental no método da flexibilidade, deve-se substituir a análise de uma estrutura indeterminada por uma análise de uma estrutura estável e determinada. Essa estrutura — chamada de estrutura liberada ou de base — é estabelecida a partir da estrutura indeterminada original, imaginando-se que certas restrições (apoios, por exemplo) são removidas temporariamente (LEET; UANG; GILBERT, 2009).

O apoio B, na Figura 5 anteriormente citada, é indeslocável e sua remoção é uma simples questão de conveniência. É colocada uma força de baixo para cima em B e ela é suficiente para evitar qualquer deslocamento ou suficiente para empurrar o ponto B para sua posição original indeslocável. A distância que o apoio deve ser empurrado é ΔB (MCCORMAC, 2015).

Aplica-se uma carga unitária em B, como mostrado na Figura 5(c), causando uma deflexão em B igual a Δ_{bb} , uma carga de 10kips em B causaria uma deflexão igual a $10\Delta_{bb}$. De forma semelhante, uma reação de baixo para cima V_b empurraria B para cima em uma distância $V_b\Delta_{bb}$. A deflexão total devida as cargas externas e a reação em B é, portanto: $\Delta B + V_b\Delta_{bb} = 0$, ou seja, $V_b = -\Delta B/\Delta_{bb}$. O sinal negativo indica que V_b está no sentido oposto ao da carga unitária que é de cima para baixo (MCCORMAC, 2015).

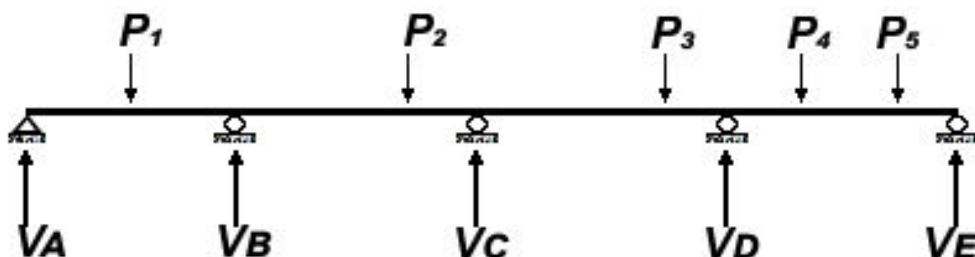
A deflexão Δ_{bb} , que é produzida pelo valor unitário da redundante, pode ser chamada de coeficiente de flexibilidade. Em outras palavras, as unidades de um coeficiente de flexibilidade são dadas em distância por carga unitária, em metros por newton, por exemplo (LEET; UANG; GILBERT, 2009).

“As unidades dos coeficientes de flexibilidade, correspondem às unidades de deslocamento ou rotação divididas pela unidade do hiperestático em questão” (MARTHA, 2010, p.215).

Segundo Mccormac (2015), o método das forças para calcular as reações redundantes pode ser estendido indefinidamente para estruturas com qualquer número de redundantes estáticas. Porém, os cálculos se tornam muito longos se

houverem mais de três redundantes estáticas. Por exemplo, considerando a viga da Figura 6, tem-se as seguintes expressões:

Figura 6 – Exemplo de viga com mais de três redundantes.



$$\begin{aligned} &\Delta B + V_B \Delta_{bb} + V_C \Delta_{bc} + V_D \Delta_{bd} \\ &\Delta C + V_B \Delta_{cb} + V_C \Delta_{cc} + V_D \Delta_{cd} \\ &\Delta D + V_B \Delta_{db} + V_C \Delta_{dc} + V_D \Delta_{dd} \end{aligned}$$

Fonte: McCormac, 2015

Primeiramente, faz-se a viga ficar estaticamente determinada removendo três apoios, admite-se que os apoios B, C e D sejam removidos e seus deslocamentos ΔB , ΔC e ΔD , devido as cargas externas sejam calculados, teoricamente, as cargas externas são removidas da viga, uma carga unitária é colocada em B e são encontrados os deslocamentos em B, C e D – Δ_{bb} , Δ_{cb} Δ_{db} . A carga é movida para o ponto C encontrando os deslocamentos Δ_{bc} , Δ_{cc} e Δ_{dc} , e depois para o ponto D encontrando Δ_{bd} , Δ_{cd} e Δ_{dd} . Com as reações empurrando esses pontos para cima até as posições originais, a reação V_b elevará B a uma distância $V_b \Delta_{bb}$, C até $V_b \Delta_{cb}$ e D até $V_b \Delta_{db}$. A reação V_c elevará B até $V_c \Delta_{bc}$, C até $V_c \Delta_{cc}$ e D até $V_c \Delta_{dc}$. E por último a reação V_d elevará B até $V_d \Delta_{bd}$, C até $V_d \Delta_{cd}$ e D até $V_d \Delta_{dd}$, resultando nas equações apresentadas na Figura 6, que podem ser tratadas matricialmente (MCCORMAC, 2015).

2.1.3.1.1 Matriz de flexibilidade e vetor dos termos de carga.

Segundo Martha (2010), o sistema de equações de compatibilidade da solução pelo método da flexibilidade, do exemplo mostrado na Figura 6 na seção anterior, pode ser escrito na forma matricial:

$$\begin{cases} \Delta B + V_b \Delta b b + V_c \Delta b c + V_d \Delta b d = 0 \\ \Delta C + V_b \Delta c b + V_c \Delta c c + V_d \Delta c d = 0 \\ \Delta D + V_b \Delta d b + V_c \Delta d c + V_d \Delta d d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \Delta B \\ \Delta C \\ \Delta D \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta b b & \Delta b c & \Delta b d \\ \Delta c b & \Delta c c & \Delta c d \\ \Delta d b & \Delta d c & \Delta d d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_b \\ V_c \\ V_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Podendo ser escrito conforme o grau de hiperestaticidade g em caso geral como: $\{\Delta_0\} + [\Delta]\{V\} = \{0\}$, onde: $\{\Delta_0\}$ é o vetor dos termos de carga; $[\Delta]$ é a matriz de flexibilidade e $\{V\}$ é o vetor dos hiperestáticos (MARTHA, 2010).

2.1.3.2 Método dos deslocamentos (ou da rigidez)

O método dos deslocamentos caracteriza-se por usar a equação de equilíbrio como equação fundamental, onde são obtidas as incógnitas primárias do problema, a partir das quais, todas as outras respostas serão obtidas. As incógnitas primárias dos problemas são os deslocamentos em que por meio destes é possível obter deformações, tensões, resultantes de tensões, etc (VAZ, 2011).

Segundo Martha (2010), o método dos deslocamentos, consiste em somar uma serie de soluções básicas satisfazendo as condições de compatibilidade, mas não as condições de equilíbrio da estrutura original para, na superposição, reestabelecer as condições de equilíbrio, sendo o inverso do procedimento feito no método das forças.

O método da inclinação-deflexão, também conhecido como método dos deslocamentos pelo fato de as equações de equilíbrio utilizadas na análise serem expressas em termos de deslocamentos de nós desconhecidos, é um procedimento para analisar vigas e pórticos indeterminados (LEET; UANG; GILBERT, 2009, p.469).

As incógnitas do método dos deslocamentos são as deslocabilidades, que são componentes de deslocamentos e rotações nos nós que definem a configuração deformada da estrutura, diferente do método das forças, onde as incógnitas são as forças e momentos associados a vínculos excedentes à determinação estática da estrutura. (MARTHA, 2010).

Quando uma estrutura está sendo analisada pelo método da rigidez, os deslocamentos dos nós (rotações e translações) são tratados como incógnitas. As equações de equilíbrio são escritas para cada nó da estrutura em termos: das cargas aplicadas, propriedades dos elementos estruturais que se conectam no nó, e dos deslocamentos desconhecidos do nó (MCCORMAC, 2015).

A solução pelo método dos deslocamentos pode ser analisada como uma superposição de soluções cinemáticas definidas, ou seja, de configurações deformadas conhecidas (MARTHA, 2010).

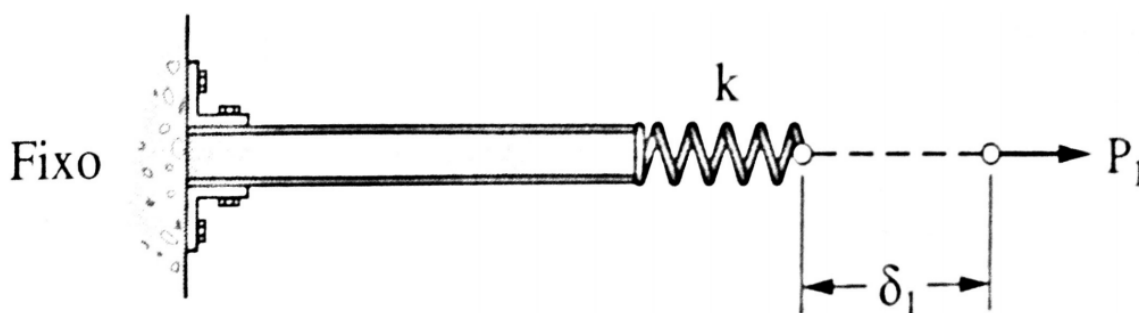
Segundo Leet, Uang e Gilbert (2009, p.198), o princípio da superposição determina que:

Se uma estrutura se comporta de maneira linearmente elástica, a força ou o deslocamento em um ponto específico produzido por um conjunto de cargas atuando simultaneamente pode ser avaliado pela soma (superposição) das forças ou deslocamentos no ponto específico, produzidos por cada carga do conjunto atuando individualmente. Em outras palavras, a resposta de uma estrutura elástica linear é a mesma se todas as cargas são aplicadas simultaneamente ou se os efeitos das cargas individuais são combinados.

O método usa conceitos de estados auxiliares e de superposição de efeitos. Inicialmente identificam-se os graus de liberdade a estrutura. Em seguida, é criado um estado auxiliar j para cada grau de liberdade impondo-se um valor unitário para o grau e liberdade δ_i , enquanto os outros são mantidos nulos (VAZ, 2011).

Segundo McCormac (2015), a rigidez em um nó é definida como a força ou o momento exigido para produzir um deslocamento (rotação) em um nó se o deslocamento for impedido nos demais nós da estrutura. Para exemplificar essa análise inicial, é examinada a mola linear da Figura 7.

Figura 7 – Representação do alongamento produzido numa mola por uma força P



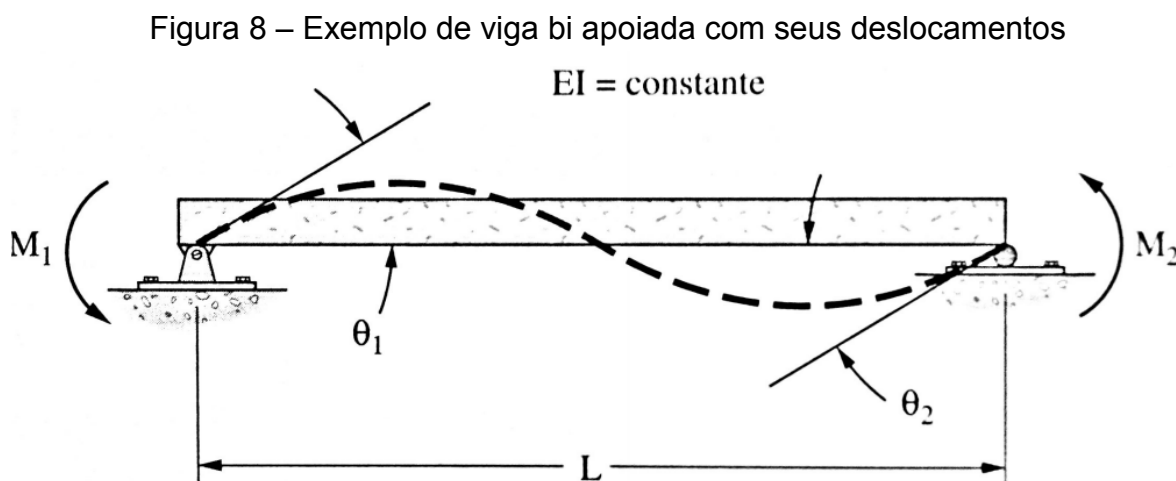
Fonte: McCormac, 2015

Com base na Figura 7, a relação entre a força aplicada P_1 , o alongamento da mola δ_1 , pode ser escrito, em função da constante da mola k (ou força exigida para produzir um deslocamento unitário), como: $P_1 = k\delta_1$, portanto se a constante da mola for conhecida, o deslocamento pode ser determinado para qualquer força aplicada P_1 (MCCORMAC, 2015).

O método básico da família do método dos deslocamentos consiste em manipular as três equações básicas da análise estrutural colocando todas as informações disponíveis nas equações de equilíbrio como incógnitas. O número de deslocamentos livres é chamado de graus de liberdade (VAZ, 2011).

O modelo estrutural utilizado nos casos básicos é o de uma estrutura cinematicamente determinada que é obtida a partir da estrutura original pela adição de vínculos na forma de apoios fictícios com o objetivo de impedir as deslocabilidades, isolando os efeitos de cada uma delas. Esse modelo é chamado de Sistema Hipergeométrico (MARTHA, 2010).

Para a maioria dos problemas práticos, é necessário conhecer o deslocamento em mais de um nó, exemplificando na Figura 8, temos uma viga apoiada com seus Momentos M_1 e M_2 provocando rotações θ_1 e θ_2 nas extremidades (MCCORMAC, 2015).



Fonte: McCormac, 2015

Segundo McCormac (2015), admitindo esse comportamento, podem ser escritas equações, segundo o método das inclinações, desde que a corda não sofra

rotação. Onde K é igual a I/L (momento de inercia/ distância entre os apoios), o denominado coeficiente de rigidez.

Como nenhuma carga é aplicada ao longo do eixo do membro e não ocorre nenhuma rotação da corda, os momentos de extremidade podem ser expressos como: (LEET; UANG; GILBERT, 2009).

$$M_1 = 2EK (2\theta_1 + \theta_2) = \frac{4EI}{L}\theta_1 + \frac{2EI}{L}\theta_2 \quad (01)$$

$$M_2 = 2EK (\theta_1 + 2\theta_2) = \frac{2EI}{L}\theta_1 + \frac{4EI}{L}\theta_2 \quad (02)$$

Onde E é o modulo de elasticidade do material. Essas equações podem também ser expressas na forma matricial da seguinte forma:

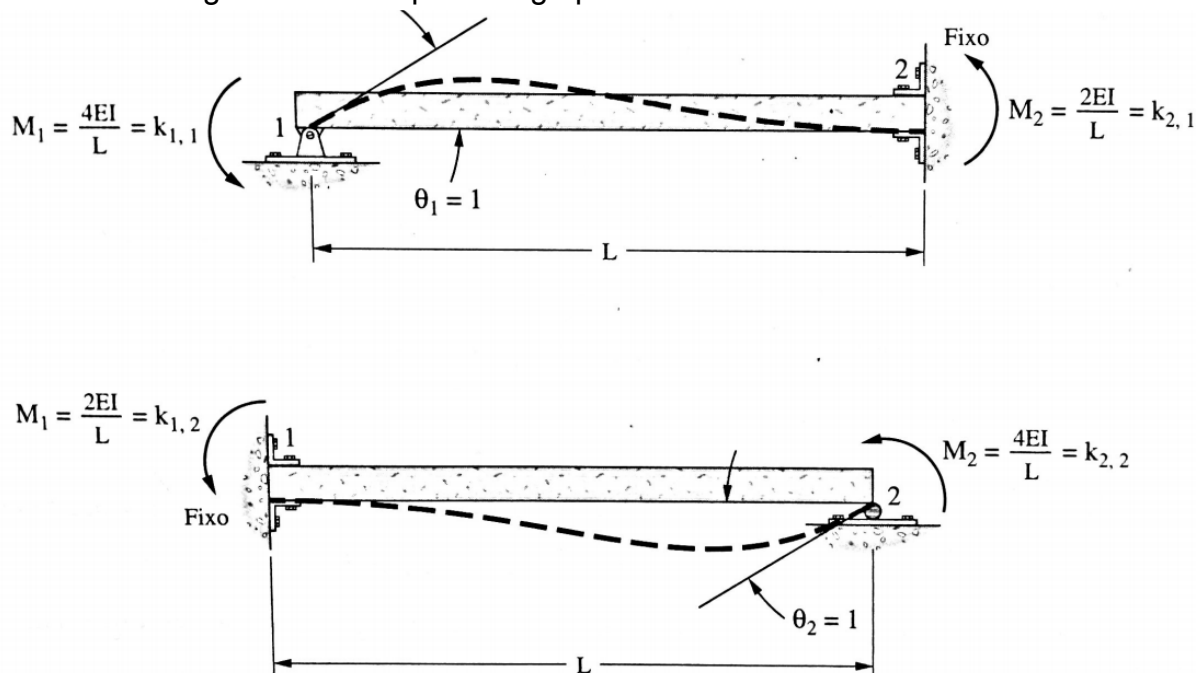
$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (03)$$

Os coeficientes $4EI/L$ e $2EI/L$ podem ser escritos simbolicamente como $k_{i,j}$, que definem a linha e a coluna do local dos coeficientes na matriz de rigidez.

O coeficiente $k_{1,1}$, por exemplo, pode ser interpretado como o momento que deve ser aplicado na extremidade 1 para produzir uma rotação unitária ($\theta_1 = 1$) enquanto a extremidade oposta permanece fixa ($\theta_2 = 0$). O coeficiente $k_{2,1}$ é o momento aplicado na extremidade 2 para essa mesma situação. Do mesmo modo o coeficiente $k_{2,2}$ e $k_{1,2}$ produzem rotação unitária ($\theta_2 = 1$) e sem rotação na extremidade 1 ($\theta_1 = 0$), como mostrado na Figura 9, a seguir (MCCORMAC, 2015).

Segundo McCormac (2015), esses são coeficientes de rigidez relativos aos graus de liberdade M_1 e M_2 provocando rotações M_1 em M_1 , M_1 em M_2 , M_2 em M_1 e M_2 em M_2 e para a matriz de rigidez total para uma viga, que será descrita na seção 2.1.3.3, eles são os termos: k_{22} , k_{24} , k_{42} e k_{44} respectivamente. Na matriz de rigidez total são consideradas também as forças que provocam esforço cortante e os termos desse exemplo passam a ocupar outras posições na matriz.

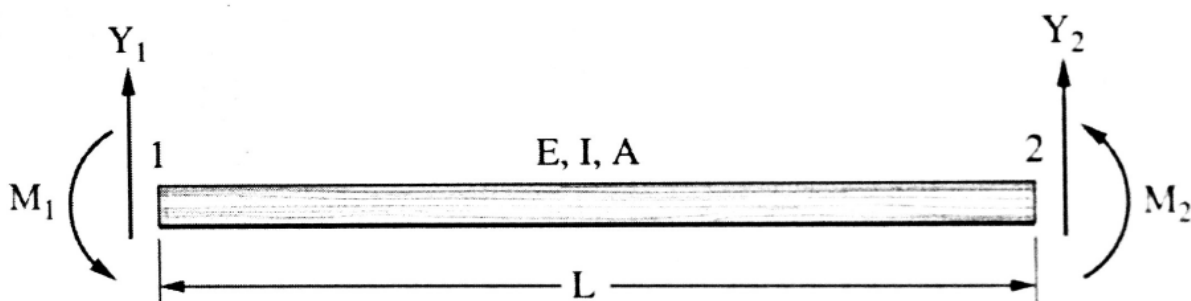
Figura 9 – Exemplo de viga para encontrar os coeficientes k



Fonte: McCormac, 2015

Segundo McCormac (2015), o estudo nessa viga biapoiada com seus dois nós ilustra muitos dos aspectos principais do método da rigidez, embora a maioria das estruturas praticas analisadas por esse método tenham mais de dois nós, e tenham também outras forças envolvidas, que mudam a matriz de rigidez. Para um elemento sujeito a flexão, assim como para elemento sujeito a força axial, os nós da viga são colocados em locais onde as forças são aplicadas e os deslocamentos são medidos, como mostrados os nós 1 e 2 na Figura 10, a seguir:

Figura 10 – Elemento de viga sujeito a flexão



Fonte: McCormac, 2015

Para o elemento de viga mostrado na Figura 10, as forças consistem em forças cisalhantes e momentos fletores designados como Y_i e M_i , respectivamente, os

deslocamentos consistem em translações v_i paralelas as forças cisalhantes, e rotações θ_i , as forças axiais também podem existir, mas podem ser consideradas como nulas quando se analisa à flexão (MCCORMAC, 2015).

Segundo Martha (2010), as equações finais do método dos deslocamentos expressam o equilíbrio dos nós da estrutura nas direções das deslocabilidades. Então é importante apresentar uma convenção de sinais para forças e momentos que facilite a definição das condições de equilíbrio. Esta convenção está descrita na Figura 11 a seguir.

Figura 11 – Quadro com a convenção de sinais

Deslocamentos horizontais		
Deslocamentos verticais		
Rotações		
Forças horizontais		
Forças verticais		
Momentos		
Esforços axiais em extremidades de barras		
Esforços cortantes em extremidades de barras		
Momentos fletores em extremidades de barras		

Fonte: Martha, 2010

2.1.3.3 Matriz de rigidez de um elemento

A análise matricial de estruturas reticuladas sistematizou as operações matemáticas da análise estrutural fazendo uso da álgebra matricial que opera com

vetores e matrizes introduzindo diversos novos conceitos na análise de estruturas. Essa sistematização baseia-se na ideia de sistema local e global e coordenadas (VAZ, 2011).

O comportamento de um elemento é descrito por intermédio de funções matemáticas que em última análise contabilizam a rigidez daquele elemento individualmente. A forma mais compacta e elegante de representar essas características do elemento em questão é por intermédio da álgebra matricial. Daí decorreu o conceito de matriz de rigidez de um elemento, assim como a rigidez de uma mola é definida pela relação força-deslocamento, em um elemento finito a ideia é a mesma, porém em caráter mais amplo, de forma que os diversos componentes de rigidez em um elemento estão relacionados com a diversas componentes de força e deslocamentos presentes (ALVES FILHO, 2005).

Segundo McCormac (2015), embora o método da rigidez e o método da flexibilidade sejam métodos distintos de análise estrutural, a matriz de flexibilidade e a de rigidez tem relação uma com a outra. Comparando as duas verifica-se que a matriz de rigidez (k) é a inversa da matriz de flexibilidade (F), logo $[k] = [F]^{-1}$.

A matriz de rigidez de uma estrutura pode ser montada criando um deslocamento unitário nos graus de liberdade selecionados (com todos os outros nós restringidos) e, então, calculando-se as forças de nó correspondentes necessárias para o equilíbrio da estrutura (LEET; UANG; GILBERT, 2009).

Segundo McCormac (2015), as matrizes de rigidez podem ser desenvolvidas para barras submetidas a carregamentos axiais, para elementos sujeitos a flexão e também elementos que tenham forças axiais agindo em conjunto com forças cisalhantes e momentos fletores. Todas essas matrizes de rigidez são escritas em uma ordem específica, que deve ser estudada atentamente. A equação geral da rigidez é escrita simbolicamente da seguinte forma: $\{P\} = [k]\{\delta\}$, onde a ordem das forças nos nós $[k]$ deve ser a mesma ordem da listagem dos deslocamentos correspondentes na matriz $\{\delta\}$.

Segundo Vaz (2011) para se obter a matriz de rigidez da estrutura para um elemento de comprimento L e rigidez EI , pode-se fazer o uso de funções de interpolação de viga através de vários métodos como o Método dos Elementos Finitos (MEF), chegando a seguinte matriz:

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} x \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (04)$$

A equação 04 representa a matriz de rigidez total que é a usada com mais frequência para um elemento de viga isolado submetido a esforços de flexão. Se forem especificadas outras condições de extremidade para a viga, outras matrizes de rigidez reduzidas seriam obtidas. Por exemplo, para elementos sujeitos a esforços axiais, seria obtida uma matriz como a expressa na equação 05, sendo A, a área da seção transversal, E, o módulo de elasticidade, e L o comprimento ou vão teórico do elemento (MCCORMAC, 2015).

$$\begin{Bmatrix} F_{1,2} \\ F_{2,1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} x \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (05)$$

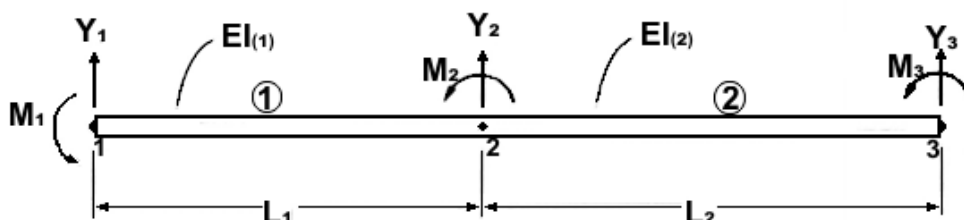
De acordo com McCormac (2015), conforme a teoria dos pequenos deslocamentos, pode-se unir as matrizes quando os elementos tiverem ambos os esforços, admite-se que os esforços axiais não influem nos momentos fletores e esforços cisalhantes, surgindo a seguinte matriz:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} x \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (06)$$

Para uma viga com dois ou mais elementos as equações de rigidez podem ser determinadas de maneira similar somando-se ou subtraindo-se adequadamente o coeficiente associado ao elemento isolado de viga (MCCORMAC, 2015).

Por exemplo, na viga da Figura 12 a seguir, surge a matriz de rigidez da equação 07.

Figura 12 – Viga hiperestática para determinação dos coeficientes de rigidez



Fonte: McCormac, 2015

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \\ Y_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 12\left(\frac{EI}{L^3}\right)_1 & 6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_1 & -12\left(\frac{EI}{L^3}\right)_1 & 6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_1 & 0 & 0 \\ 6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_1 & 4\left(\frac{EI}{L}\right)_1 & -6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_1 & 2\left(\frac{EI}{L}\right)_1 & 0 & 0 \\ -12\left(\frac{EI}{L^3}\right)_1 & -6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_1 & 12\left(\frac{EI}{L^3}\right)_1 + 12\left(\frac{EI}{L^3}\right)_2 & -6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_1 + 6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_2 & -12\left(\frac{EI}{L^3}\right)_2 & 6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_2 \\ 6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_1 & 2\left(\frac{EI}{L}\right)_1 & -6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_1 + 6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_2 & 4\left(\frac{EI}{L}\right)_1 + 4\left(\frac{EI}{L}\right)_2 & -6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_2 & 2\left(\frac{EI}{L}\right)_2 \\ 0 & 0 & -12\left(\frac{EI}{L^3}\right)_2 & -6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_2 & 12\left(\frac{EI}{L^3}\right)_2 & -6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_2 \\ 0 & 0 & 6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_2 & 2\left(\frac{EI}{L}\right)_2 & -6\left(\frac{EI}{L^2}\right)_2 & 4\left(\frac{EI}{L}\right)_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \quad (07)$$

2.1.4 Método Dos Elementos Finitos

Nesta seção será apresentado o método da rigidez direta, um procedimento que fornece a base para a maioria dos programas de computador utilizados para analisar estruturas. O método pode ser aplicado a quase todos os tipos de estrutura, por exemplo, treliças, vigas contínuas, pórticos indeterminados, placas e cascas. Quando aplicado tipos de problemas que podem ser subdivididos em elementos bidimensionais e tridimensionais, o método é chamado também de método dos elementos finitos (LEET; UANG; GILBERT, 2009)

O Método dos Elementos Finitos (MEF) pertence à família do método dos deslocamentos ou método da rigidez, onde deslocamentos são escolhidos como incógnitas. Todos os membros dessa família caracterizam-se por ter a equação de

equilíbrio cujas incógnitas são deslocamentos generalizados como equação fundamental. Entendem-se por deslocamentos generalizados, tais como, deslocamentos lineares, rotações, etc. (VAZ, 2011).

No método dos elementos finitos apresenta-se um modelo numérico destinado principalmente às estruturas que não são caracterizadas como barras, chamadas estruturas contínuas (SORIANO, 2014).

O método dos elementos finitos, segundo Moreira (1977, p. 3):

Considera a estrutura dividida em partes ou elementos que já não são infinitesimais, ligados entre si em pontos nodais, onde se supõem concentradas todas as forças de ligação entre elementos. Sendo as solicitações e deformações discretizadas nos nós, o comportamento elástico e mecânico de cada elemento pode ter expressão matemática tão simples quanto a dos elementos infinitesimais da solução clássica. A composição desses elementos de tamanho finito para constituir a estrutura considerada dá lugar a sistemas de equações facilmente tratados por via matricial.

Dentro da engenharia estrutural o MEF gerou uma grande revolução, permitindo a resolução de problemas complexos cuja solução analítica se mostrava inviável. Na análise de estruturas de concreto, esta técnica permite a avaliação detalhada do seu comportamento, tendo ao mesmo tempo uma modelagem bastante abrangente e específica dos componentes envolvidos no sistema estrutural (SARTURI, 2014).

“A essência dos métodos básicos de análise estrutural está na representação discreta do comportamento contínuo, analítico e matemático de um modelo estrutural em termos de um número finito de parâmetros” (MARTHA, 2010, p.409).

O conceito de rigidez de um elemento desempenhou um papel muito importante na discretização de problemas estruturais. O elemento de mola sendo abordado primeiramente a respeito de discussões sobre elementos finitos, através de seu estudo, permitiu estabelecer algumas conclusões gerais em relação ao conceito de rigidez em qualquer modelo de análise (ALVES FILHO, 2005).

Segundo Vaz (2011), a ideia básica do modelo de elementos finitos para a estrutura consiste em usar funções aproximadoras, descritas em subdomínios ou elementos finitos, para descrever os campos de deslocamento da estrutura. A melhoria para a solução é obtida usando mais subdomínios ou elementos, e não apenas usando polinômios de grau mais elevado. Para sistematizar as operações

matemáticas do problema, as funções aproximadoras devem ser descritas em cada subdomínio por funções de interpolação previamente definidas.

Segundo Alves Filho (2013, p.140):

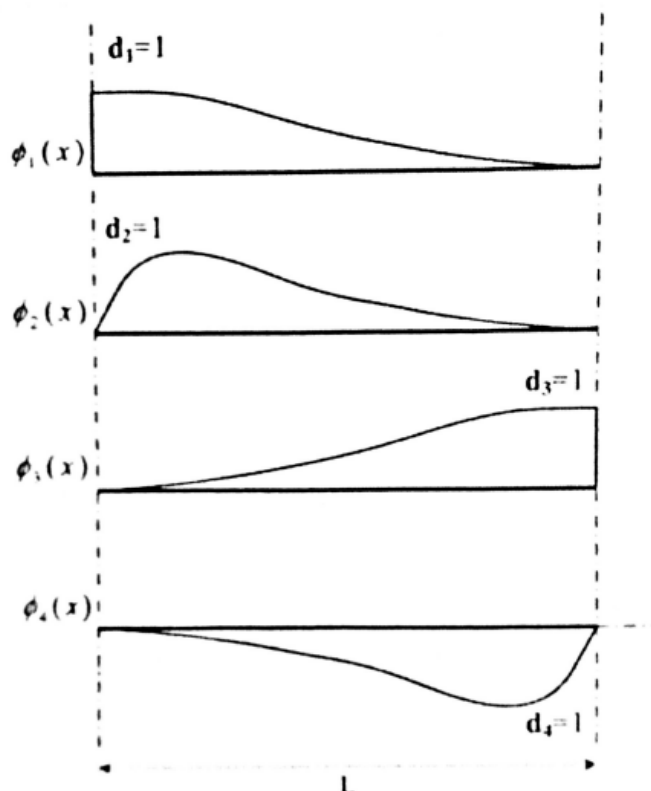
Deve-se especificar a função dos deslocamentos que defina de forma única todos os pontos do elemento, em termos dos graus de liberdade dos nós, permitindo, a partir de deslocamentos nodais conhecidos determinar os deslocamentos dentro do elemento. A função de interpolação escolhida deve representar o elemento deformado o mais próximo possível do seu comportamento real.

Para um trecho de comprimento L denominado elemento finito viga representado na Figura 13, escreve-se uma função aproximadora de terceiro grau em função dos parâmetros do polinômio α_i , $i = 1, \dots, 4$ (VAZ, 2011).

A função aproximadora deve ter no mínimo um coeficiente desconhecido para cada grau de liberdade, como o elemento de viga sujeito a flexão tem 4 graus de liberdade, a função tem 4 coeficientes desconhecidos (ALVES FILHO, 2013).

$$v(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \quad (08)$$

Figura 13 – Funções de interpolação do elemento finito de viga



Fonte: Vaz, 2011

Segundo Vaz (2011), para se escrever a função aproximadora em função dos deslocamentos nos nós, são impostas as seguintes condições de contorno, de acordo com a Figura 13.

$$\begin{cases} v|_{x=0} = \delta_1 \\ v'|_{x=0} = \delta_2 \\ v|_{x=L} = \delta_3 \\ v'|_{x=L} = \delta_4 \end{cases} \quad (09)$$

Vaz (2011) diz ainda que, v' é a derivada da função expressa na equação 08, e substituindo x na mesma equação, ficaríamos com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} v|_{x=0} = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0^2 + \alpha_4 \cdot 0^3 = \delta_1 \\ v'|_{x=0} = 0 + \alpha_2 + 2\alpha_3 \cdot 0 + 3\alpha_4 \cdot 0^2 = \delta_2 \\ v|_{x=L} = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot L + \alpha_3 \cdot L^2 + \alpha_4 \cdot L^3 = \delta_3 \\ v'|_{x=L} = 0 + \alpha_2 + 2\alpha_3 \cdot L + 3\alpha_4 \cdot L^2 = \delta_4 \end{cases} \quad (10)$$

Ou na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v(x)_1 \\ v'(x)_1 \\ v(x)_2 \\ v'(x)_2 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Segundo Alves Filho (2013), a equação 11, pode ser representada de forma compacta da seguinte maneira:

$$v(x) = \{\delta_i\} = [H(x)] \cdot \{\alpha_i\} \quad (12)$$

Onde, para Vaz (2011), $[H(x)]$ representa a matriz das variáveis e $\{\alpha_i\}$ a matriz dos coeficientes desconhecidos e que devem ser determinados. Logo, é possível determinar os elementos desses coeficientes desconhecidos através da seguinte expressão:

$$\{\alpha_i\} = \{\delta_i\}/[H(x)] = \{\delta_i\} \cdot [H(x)]^{-1} \quad (13)$$

Segundo Alves Filho (2013), $[H(x)]^{-1}$ é a matriz inversa da matriz $[H(x)]$, que pode ser encontrada através da seguinte equação:

$$[H(x)]^{-1} = \frac{1}{\det[H(x)]} [\text{cof}[H(x)]]^T \quad (14)$$

Onde $\det [H(x)]$ é o determinante da matriz original, e $[\text{cof}[H(x)]]^T$ é a matriz transposta dos cofatores de $[H(x)]$ (ALVES FILHO, 2013).

Segundo Alves Filho (2013), a equação 18 indica que a matriz inversa $[H(x)]^{-1}$ é igual a 1 dividido pelo determinante na matriz $[H(x)]$ vezes a matriz transposta dos cofatores $[\text{cof}[H(x)]]^T$. Primeiramente, encontra-se o determinante da matriz inversa que é igual a 1 sobre o determinante da matriz original.

Alves Filho (2013) diz que, segundo o teorema de Laplace, o determinante da matriz $[H(x)]_{i,j}$ pode ser expresso escolhendo uma linha i ou uma coluna j para excluir (de preferência com mais números zeros), encontrando os cofatores nessa linha ou coluna escolhida e somando o resultado do produto dos cofatores nessa linha ou coluna pelos seus respectivos termos, como mostrado na equação a seguir:

$$\det [H(x)]_{i,j} = (a_{i,j} \cdot C_{i,j})_1 + (a_{i,j} \cdot C_{i,j})_2 + \dots (a_{i,j} \cdot C_{i,j})_n \quad (15)$$

Portanto, se o termo a_{ij} for igual a zero, são menos somas a serem feitas. Os cofatores $C_{i,j}$ são encontrados excluindo a linha i e a coluna j da matriz original, formando uma matriz de menor ordem, encontrando o determinante da matriz reduzida obtida com a exclusão dessas linhas e colunas e através da multiplicação desse determinante pela expressão $(-1)^{i+j}$, em que i é a linha e j a coluna do elemento é obtido o cofator $C_{i,j}$ (ALVES FILHO, 2013).

No exemplo da equação 11, para encontrar o determinante, foi escolhida a primeira linha da matriz, que é dado em função dos cofatores C por:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} = 1 \cdot C_{11} + 0 \cdot C_{12} + 0 \cdot C_{13} + 0 \cdot C_{14} \quad (16)$$

Os elementos C_{12} , C_{13} e C_{14} não precisam ser encontrados para encontrar o determinante, pois ao multiplicar pelos termos da matriz que são iguais a zero terão valores nulos. Para encontrarmos C_{11} , elimina-se a linha 1 e a coluna 1 da matriz $[H(x)]$ original, encontra-se o determinante da matriz 3×3 resultante dessa eliminação e multiplica-se por -1 elevado na $(1+1)$ (ALVES FILHO, 2013).

Para encontrar o determinante em uma matriz de ordem 3 aplica-se a regra de sarrus, como mostrado a seguir:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L & L^2 & L^3 \\ 1 & 2L & 3L^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ L & L^2 \\ 1 & 2L \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot (3L^4 - 2L^4) = L^4 \quad (17)$$

O determinante final de $[H(x)]_{4 \times 4}$ é expresso por:

$$\det = 1 \cdot C_{11} = 1 \cdot L^4 = L^4$$

Após encontrar o determinante da matriz, encontra-se a matriz dos cofatores, que é obtida encontrando todos os cofatores e colocando-os na matriz de acordo com a linha i e a coluna j dos mesmos (ALVES FILHO, 2013).

$$C_{i,j} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Segundo Alves Filho (2013), para encontrar a matriz dos cofatores, é necessário encontrar todos os cofatores da matriz original $[H(x)]$ através do processo descrito anteriormente, na equação 17 e substituir na matriz da equação 18 encontrando para a matriz $[H(x)]$, a seguinte matriz dos cofatores:

$$[cof[H(x)]] = \begin{bmatrix} L^4 & 0 & -3L^2 & 2L \\ 0 & L^4 & -2L^3 & L^2 \\ 0 & 0 & 3L^2 & -2L \\ 0 & 0 & -L^3 & L^2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Alves Filho (2013) diz ainda que, como a equação pede a matriz transposta $[\text{cof}[H(x)]^T$, deve-se encontrar a mesma trocando os elementos de linha por elementos de coluna, por exemplo, o elemento C_{11} fica na mesma posição enquanto o elemento C_{12} passa a ocupar o lugar do elemento C_{21} e vice-versa. Portanto a nova matriz é obtida trocando os elementos C_{ij} por elementos C_{ji} , como exemplificado na matriz a seguir:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & C_{41} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & C_{42} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{43} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Logo, obtém-se a seguinte matriz:

$$[\text{cof}[H(x)]]^T = \begin{bmatrix} L^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^4 & 0 & 0 \\ -3L^2 & -2L^3 & 3L^2 & -L^3 \\ 2L & L^2 & -2L & L^2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

A matriz inversa é então obtida através da seguinte equação:

$$[H(x)]^{-1} = \frac{1}{L^4} \begin{bmatrix} L^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^4 & 0 & 0 \\ -3L^2 & -2L^3 & 3L^2 & -L^3 \\ 2L & L^2 & -2L & L^2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Resultando em:

$$[H(x)]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Substituindo o resultado da equação 23 na equação 13, obtém-se a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

Para Vaz (2011), a solução da equação 24 fornece os α_i em função dos deslocamentos nodais δ_i . Substituindo-se os α_i obtidos da solução da equação 24 na equação 08, chega-se a:

$$v(x) = \phi_1(x) d_1 + \phi_2(x) d_2 + \phi_3(x) d_3 + \phi_4(x) d_4 \quad (25)$$

Ou na forma reduzida:

$$\{v(x)\} = \{\phi_1(x)\} \cdot \{d\} \quad (26)$$

Segundo Alves Filho (2013), como foi encontrado na equação 24 o vetor dos α_i , substitui-se na equação 08, encontrando a seguinte multiplicação matricial:

$$\{\phi(x)\} = \{1 \quad x \quad x^2 \quad x^3\} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Onde, segundo Vaz (2011), ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 e ϕ_4 podem ser obtidos através de funções que representam as funções de forma, em que:

- ϕ_1 considera $v(0) = 1$, $dv(0)/dx = 0$, $v(L) = 0$ e $dv(L)/dx = 0$;
- ϕ_2 considera $v(0) = 0$, $dv(0)/dx = 1$, $v(L) = 0$ e $dv(L)/dx = 0$;
- ϕ_3 considera $v(0) = 0$, $dv(0)/dx = 0$, $v(L) = 1$ e $dv(L)/dx = 0$;
- ϕ_4 considera $v(0) = 0$, $dv(0)/dx = 0$, $v(L) = 0$ e $dv(L)/dx = 1$.

Segundo Alves Filho (2013), embora tenha sido construída para o elemento de viga, a função de forma de um elemento finito é geral, e constitui um dos mais importantes conceitos na formulação dos elementos. Ela estabelece o comportamento

do elemento, ou seja, tendo os deslocamentos nodais, é possível calcular os deslocamentos dentro do elemento.

Segundo Vaz (2011), essas funções, que surgem do resultado da equação 27 e representam as curvas das deslocabilidades na Figura 11, são respectivamente:

$$\begin{cases} \phi_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ \phi_2(x) = x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ \phi_3(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ \phi_4(x) = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \end{cases} \quad (28)$$

Vaz (2011) diz ainda que os coeficientes K_{ij} da matriz de rigidez do elemento de viga podem ser obtidos através da seguinte equação:

$$K_{ij} = EI \int_0^L \phi_i''(x) \cdot \phi_j''(x) dx \quad (29)$$

Para o termo K_{11} , por exemplo, temos:

$$K_{ij} = EI \int_0^L \phi_1''(x) \cdot \phi_1''(x) dx$$

$$\phi_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

$$\phi_1'(x) = -6\frac{x}{L^2} + 6\frac{x^2}{L^3}$$

$$\phi_1''(x) = -\frac{6}{L^2} + 12\frac{x}{L^3}$$

$$K_{ij} = EI \int_0^L \left(-\frac{6}{L^2} + 12\frac{x}{L^3}\right) \cdot \left(-\frac{6}{L^2} + 12\frac{x}{L^3}\right) dx$$

$$K_{ij} = EI \int_0^L \left(\frac{36}{L^4} - 144\frac{x}{L^5} + 144\frac{x^2}{L^6}\right) dx \quad (30)$$

$$K_{ij} = EI \left(36\frac{x}{L^4} - 72\frac{x^2}{L^5} + 48\frac{x^3}{L^6}\right)$$

$$K_{ij} = EI \left(36 \frac{L}{L^4} - 72 \frac{L^2}{L^5} + 48 \frac{L^3}{L^6} \right)$$

$$K_{ij} = EI \left(\frac{36}{L^3} - \frac{72}{L^3} + \frac{48}{L^3} \right)$$

$$K_{ij} = EI \left(\frac{12}{L^3} \right) = \frac{12EI}{L^3}$$

Segundo Vaz (2011), na resolução da equação 30 descrita acima, temos um exemplo de como encontrar um coeficiente de rigidez K de acordo com sua posição na matriz de rigidez. Portanto, para encontrar os coeficientes restantes, basta seguir o mesmo processo substituindo os termos ϕ_i e ϕ_j pelos da equação 28, de acordo com a posição do coeficiente K na matriz a seguir:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \quad (31)$$

Após essa substituição de acordo com a matriz representada na equação 31, chega-se a matriz de rigidez para um elemento de viga isolado apresentada na equação 04 da seção 2.1.3.3, que representam a relação causa-efeito de um determinado grau de liberdade em outro (ALVES FILHO, 2013).

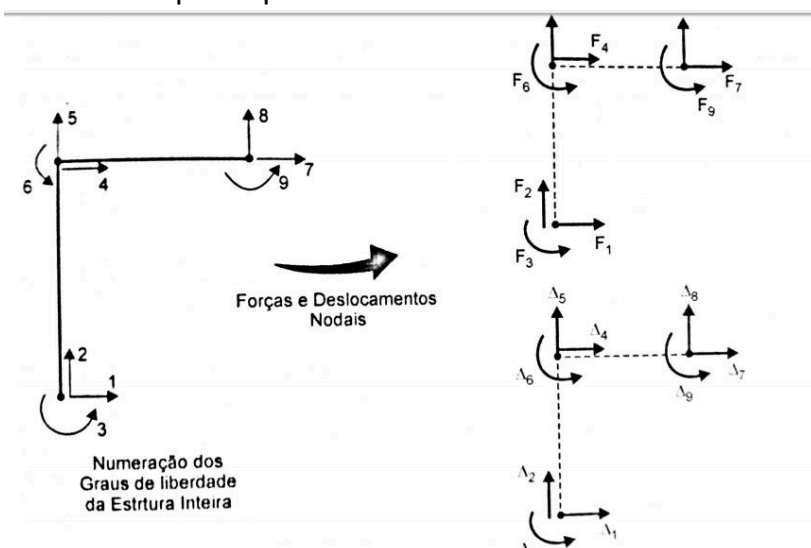
Segundo Alves Filho (2013), causa é um deslocamento unitário imposto em um grau de liberdade e efeito são as forças que surgem nos outros graus de liberdade devido a este deslocamento.

Com o conhecimento da matriz de rigidez de um elemento de viga podem ser construídas matrizes para outros elementos, como será mostrado na seção a seguir (ALVES FILHO, 2013).

2.1.4.1 Montagem de uma matriz em um pórtico plano.

Para a montagem de uma matriz de rigidez em um pórtico plano, será analisado o pórtico da Figura 14 a seguir.

Figura 14 – Pórtico plano para encontrar coeficientes na matriz de rigidez.



Fonte: Alves Filho, 2013

Uma matriz de rigidez de um elemento viga submetida somente a flexão, deve ser uma matriz quadrada de dimensão 4×4 , pois o elemento possui 4 graus de liberdade (ALVES FILHO, 2013).

Segundo Alves Filho (2013), como o pórtico plano apresentado na Figura 14 tem 9 graus de liberdade e está submetido a esforços, tanto de flexão como axiais, veremos que sua matriz será de ordem 9, ou seja, 9×9 .

Primeiramente, enumera-se os graus de liberdade. Porém como o elemento de pórtico possui uma barra perpendicular ao eixo horizontal, deve-se usar uma matriz de transformação, que transforme as forças e deslocamentos de um sistema local para um sistema global de coordenadas (VAZ, 2011).

O elemento de pórtico plano tem as mesmas características de um elemento de viga, portanto o elemento da Figura 14 pode ser subdividido em 2 elementos de viga, porém o elemento perpendicular ao eixo deve ser multiplicado por uma matriz de transformação que relaciona o seno e cosseno do ângulo com a horizontal (ALVES FILHO, 2013).

Segundo Vaz (2011), o ângulo define a rotação do eixo da barra em relação ao sistema global. Associados aos vetores de deslocamentos, são criados também os vetores das forças nos nós no sistema local e global de coordenadas. Para transformar uma matriz de rigidez de um sistema global para um sistema local, pode ser usada a matriz de rotação R que para um elemento apenas com esforços axiais e esforços

cortantes (pois como os momentos já são uma rotação, os mesmos permanecem iguais mesmo com as rotações dos outros esforços) é a indicada a seguir:

$$\begin{Bmatrix} dl_1 \\ dl_2 \\ dl_3 \\ dl_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos & \sin & 0 & 0 \\ -\sin & \cos & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos & \sin \\ 0 & 0 & -\sin & \cos \end{bmatrix} x \begin{Bmatrix} dg^1 \\ dg^2 \\ dg^3 \\ dg^4 \end{Bmatrix} \quad (32)$$

Porém, segundo Alves Filho (2013), é necessário transformar do sistema local para o global, usando a seguinte formula: $dg = R^{-1} \cdot dl \cdot R$, onde R^{-1} é a inversa da matriz de rotação R , que é encontrada através da equação representada a seguir:

$$R^{-1} = \frac{1}{\det R} \cdot [\text{cof}R]^T \quad (33)$$

A equação 33 indica que a matriz inversa R^{-1} é igual a 1 dividido pelo determinante da matriz R vezes a matriz transposta dos cofatores de R $[\text{cof}R]^T$ (ALVES FILHO, 2013).

Aplicando novamente o teorema de Laplace na matriz da equação 32, o determinante é encontrado escolhendo a quarta linha da matriz, encontrando os cofatores e fazendo as operações da seguinte forma:

$$\det R = \begin{bmatrix} \cos & \sin & 0 & 0 \\ -\sin & \cos & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos & \sin \\ 0 & 0 & -\sin & \cos \end{bmatrix} = 0.C_{41} + 0.C_{42} + (-\sin.C_{43}) + \cos.C_{44} \quad (34)$$

Novamente, existem valores nessa linha (C_{41} e C_{42}), que não precisam ser encontrados, pois serão multiplicados por 0, apresentarão um valor nulo como resposta.

Segundo Alves Filho (2013), para encontrarmos C_{43} , elimina-se a linha 4 e a coluna 3 da matriz R original, encontra-se o determinante da matriz 3x3 resultante dessa eliminação e multiplica-se por -1 elevado na $(4+3)$. Para encontrar o determinante em uma matriz de ordem 3 aplica-se a regra de sarrus, como mostrado a seguir:

$$C_{43} = (-1)^{4+3} \begin{bmatrix} \cos & \sin & 0 \\ -\sin & \cos & 0 \\ 0 & 0 & \sin \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos & \sin \\ -\sin & \cos \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (-1)^7 \cdot [\cos^2 \cdot \sin - (-\sin^3)] \quad (35)$$

Logo, tem-se: $C_{43} = -\cos^2 \cdot \sin - \sin^3$

Já para o C_{44} , segundo Alves Filho (2013), elimina-se a linha 4 e a coluna 4 da matriz, encontra-se o determinante da matriz 3x3 resultante dessa eliminação e multiplica-se por -1 elevado na (4+4).

$$C_{44} = (-1)^8 \begin{bmatrix} \cos & \sin & 0 \\ -\sin & \cos & 0 \\ 0 & 0 & \cos \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos & \sin \\ -\sin & \cos \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (1) \cdot [\cos^3 - (-\sin^2 \cdot \cos)] \quad (36)$$

Logo, temos $C_{44} = \cos^3 + \sin^2 \cdot \cos$.

Segundo Alves Filho (2013), o determinante final de $R_{4 \times 4}$ é expresso por:

$$\begin{aligned} \text{Det } R &= 0 \cdot C_{41} + 0 \cdot C_{42} + (-\sin \cdot C_{43}) + \cos \cdot C_{44} \\ \text{Det } R &= 0 + 0 + [-\sin \cdot (-\cos^2 \cdot \sin - \sin^3)] + [\cos \cdot (\cos^3 + \sin^2 \cdot \cos)] \\ \text{Det } R &= (\cos^2 \cdot \sin^2 + \sin^4) + (\cos^4 + \sin^2 \cdot \cos^2) \\ \text{Det } R &= 2 \cos^2 \cdot \sin^2 + \sin^4 + \cos^4 \end{aligned} \quad (37)$$

Após encontrar o determinante da matriz, que se observado com atenção resulta em 1 para qualquer ângulo, deveria, porém nesse caso não há necessidade, ser encontrada a matriz dos cofatores, mas como o determinante da matriz inversa R^{-1} é $1/1 = 1$, sendo o mesmo que na matriz R , a matriz inversa é apenas a matriz original R transposta. Pois em uma matriz transposta R^T e sua matriz original R possuem o mesmo determinante. (ALVES FILHO, 2013).

Segundo Martha (2010), a matriz de transformação por rotação é ortogonal, ou seja, sua inversa R^{-1} é igual a sua transposta R^T , logo pode-se obter as deslocabilidades no sistema global a partir da transposta da matriz R em função das deslocabilidades no sistema local.

Como resultado, tem-se a seguinte matriz:

$$R^t = R^{-1} = \begin{bmatrix} \cos & -\sin & 0 & 0 \\ \sin & \cos & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos & -\sin \\ 0 & 0 & \sin & \cos \end{bmatrix} \quad (38)$$

Já para o pórtico da Figura 14, como há graus de liberdade relacionados a momentos fletores que não sofrem rotação, deve-se acrescentar uma linha e uma coluna para cada grau de liberdade relacionado a momento, preenchidas com zeros e na posição onde o deslocamento gerado no grau de momento gera esforço nele mesmo deve-se colocar 1 resultando nas seguintes matrizes de rotação e inversa (ALVES FILHO, 2013), indicadas nas equações abaixo:

$$R = \begin{bmatrix} \cos & \sin & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin & \cos & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos & \sin & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin & \cos & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R^{-1} = \begin{bmatrix} \cos & -\sin & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin & \cos & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos & -\sin & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin & \cos & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

A equação 39 representa as matrizes, uma, a de rotação e outra, a sua inversa. Para o pórtico da Figura 14 que tem seu elemento inclinado formando um ângulo de 90° com a horizontal, deve-se substituir os senos e cossenos na equação 39 pelos senos e cossenos de 90 e multiplicar para transformar a matriz de rigidez de um elemento de viga com ângulo de 90° com a horizontal em uma matriz global. (VAZ, 2011).

Segundo Alves Filho (2013), para transformar a matriz de rigidez local que está a 90° com o plano horizontal em uma matriz global basta multiplicar a matriz de rotação inversa da equação 39 pela matriz rigidez da equação 06, $[R^{-1}] \cdot [k]$, e o resultado obtido pela matriz de rotação R , como indicado a seguir:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Resultando na seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (41)$$

Como a ordem dos deslocamentos deve ser mantida a mesma em função dos esforços resultantes (MCCORMAC, 2015), deve ser feita a troca de posição no vetor dos deslocamentos, obtendo dessa forma a seguinte matriz de rigidez, que nada mais é o que a matriz da equação 06 transformada para um elemento a 90° com o eixo horizontal:

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ X_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ X_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} v_1 \\ u_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (42)$$

A matriz de rigidez num sistema local de um elemento que está paralelo ao eixo x, é igual a ela mesma no sistema global (VAZ, 2011).

Já uma matriz com inclinação diferente, deve ser analisada de acordo com o ângulo que ela forma com a horizontal, mudando os termos da matriz de rotação, que são em função das relações trigonométricas seno e cosseno dos ângulos, tendo que ser refeito os cálculos descritos desde a equação 40 (ALVES FILHO, 2013).

Segundo Alves Filho (2013), para o pórtico da Figura 14, tem-se um elemento 1 perpendicular ao eixo x, e um elemento 2, paralelo ao mesmo, nota-se que há esforços tanto axiais como de flexão, logo a montagem da matriz de rigidez é feita primeiramente identificando-se os nós do pórtico, e seus respectivos graus de liberdade como mostrado na Figura 14.

Como foi citado anteriormente, segundo McCormac (2015), admite-se, de acordo com a teoria dos pequenos deslocamentos que os esforços axiais não influem nos esforços de flexão, obtendo-se como exemplo, para a primeira linha da matriz do elemento 1, que está perpendicular ao eixo x, os seguintes termos:

- $K_{11} = 12EI/L^3$
- $K_{12} = 0$
- $K_{13} = -6EI/L^2$
- $K_{14} = -12EI/L^3$
- $K_{15} = 0$
- $K_{16} = -6EI/L^2$
- $K_{17} = 0$
- $K_{18} = 0$
- $K_{19} = 0$

Segundo Alves Filho (2013), é importante entender o significado dos termos $K_{ij} = 0$ na montagem da matriz, por exemplo, K_{12} é igual a 0 porque a força no grau de liberdade 2 ($j=2$) devido a um deslocamento unitário no grau de liberdade 1 ($i=1$) é igual a 0. Isso pode ser verdadeiro porque o grau de liberdade 1 está associado a um esforço de flexão, enquanto o grau de liberdade 2, está associado a um esforço axial. Da mesma forma todos os coeficientes K_{ij} da matriz que forem iguais a zero devem ser interpretados.

Conforme descrito anteriormente, para Alves Filho (2013), a matriz de rigidez de um elemento é uma matriz quadrada de ordem n , em que n é igual ao número de graus de liberdade que o elemento apresenta. Logo a matriz da Figura 14 terá 9 linhas e 9 colunas.

Observa-se que, nos graus de liberdade 4, 5 e 6 existem esforços dos dois elementos e também que nos termos K_{44} e K_{55} há esforços de flexão junto a esforços axiais, já no K_{66} temos o mesmo tipo de esforço só que dos dois elementos. (ALVES FILHO, 2013).

Segundo Alves Filho (2013), o termo K_{44} e K_{55} da matriz $[K]$ da estrutura são obtidos pela soma de um termo de rigidez a flexão e outro de rigidez axial. Nota-se que no elemento 1, o termo K_{44} está associado a uma força cortante enquanto no

elemento 2, está associado a uma força axial enquanto o K_{55} está associado a um esforço cortante no elemento 2 e axial no elemento 1.

Os graus de liberdade 1, 2 e 3 não provocam nenhum esforço devido ao seu deslocamento unitário nos graus 7, 8, e 9, e vice-versa, portanto, os coeficientes K_{17} , K_{18} , K_{19} , K_{27} , K_{28} , K_{29} , K_{37} , K_{38} , K_{39} , K_{71} , K_{72} , K_{73} , K_{81} , K_{82} , K_{83} , K_{91} , K_{92} e K_{93} são iguais a zero (ALVES FILHO, 2013).

Segundo Alves Filho (2013), conhecendo as propriedades da matriz de rigidez global K e entendendo as transformações das matrizes locais em matrizes globais, pode-se construir a equação de rigidez com a seguinte matriz $[K]$ para o elemento de pórtico da Figura 14:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{12EI}{L^3}\right)_1 & 0 & \left(-\frac{6EI}{L^2}\right)_1 & \left(-\frac{12EI}{L^3}\right)_1 & 0 & \left(-\frac{6EI}{L^2}\right)_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{AE}{L}\right)_1 & 0 & 0 & \left(-\frac{AE}{L}\right)_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(-\frac{6EI}{L^2}\right)_1 & 0 & \left(\frac{4EI}{L}\right)_1 & \left(\frac{6EI}{L^2}\right)_1 & 0 & \left(\frac{2EI}{L}\right)_1 & 0 & 0 & 0 \\ \left(-\frac{12EI}{L^3}\right)_1 & 0 & \left(\frac{6EI}{L^2}\right)_1 & \left(\frac{12EI}{L^3}\right)_1 + \left(\frac{AE}{L}\right)_2 & 0 & \left(\frac{6EI}{L^2}\right)_1 & \left(-\frac{AE}{L}\right)_2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{AE}{L}\right)_1 & 0 & 0 & \left(\frac{AE}{L}\right)_1 + \left(\frac{12EI}{L^3}\right)_2 & \left(\frac{6EI}{L^2}\right)_2 & 0 & \left(-\frac{12EI}{L^3}\right)_2 & \left(\frac{6EI}{L^2}\right)_2 \\ \left(-\frac{6EI}{L^2}\right)_1 & 0 & \left(\frac{2EI}{L}\right)_1 & \left(\frac{6EI}{L^2}\right)_1 & \left(\frac{6EI}{L^2}\right)_2 & \left(\frac{4EI}{L}\right)_1 + \left(\frac{4EI}{L}\right)_2 & 0 & \left(-\frac{6EI}{L^2}\right)_2 & \left(\frac{2EI}{L}\right)_2 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{AE}{L}\right)_2 & 0 & 0 & \left(-\frac{AE}{L}\right)_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{12EI}{L^3}\right)_2 & \left(-\frac{6EI}{L^2}\right)_2 & 0 & \left(\frac{12EI}{L^3}\right)_2 & \left(-\frac{6EI}{L^2}\right)_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{6EI}{L^2}\right)_2 & \left(\frac{2EI}{L}\right)_2 & 0 & \left(-\frac{6EI}{L^2}\right)_2 & \left(\frac{4EI}{L}\right)_2 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Onde $\{P\} = [K]\{\delta\}$, sendo $\{P\}$ o vetor das forças e $\{\delta\}$ o vetor dos deslocamentos.

2.1.5 Modelagem Computacional

Com os atuais recursos computacionais torna-se possível analisar os sistemas estruturais em comportamento integrado de todos os seus componentes. Contudo, pelo fato de esses sistemas serem usualmente muito complexos, essa não é a pratica na maioria das vezes, as teorias de analise são aproximadas e, ao iniciar o projeto, não se tem o dimensionamento geométrico definitivo de seus elementos, as ações não tem determinação rigorosa, as propriedades mecânicas os materiais costumam apresentar variações em torno de seus valores característicos e o processo construtivo pode induzir pequenas imperfeições na estrutura. Por isso, adotam-se

hipóteses simplificadoras para a construção do modelo matemático de análise da estrutura (SORIANO, 2014).

Segundo Leet, Uang e Gilbert (2009, p.659):

Antes que os computadores se tornassem disponíveis, nos anos 1950, as equipes de engenheiros podiam demorar vários meses para produzir uma análise aproximada de um pórtico espacial tridimensional altamente indeterminado. Atualmente, entretanto, uma vez que o engenheiro especifique as coordenadas dos nós, o tipo de nó (articulado ou fixo), as propriedades das barras e a distribuição das cargas aplicadas, o programa de computador pode produzir uma análise exata em poucos minutos. A saída do computador especifica as forças em todas as barras, as reações e os componentes de deslocamento de nós e apoios.

A introdução ao método da rigidez fornece uma noção dos princípios físicos abrangidos pelo método. Embora a codificação do método da rigidez seja simples, os detalhes que formam parte de sua aplicação a quase todas as estruturas são cansativos para quem tentar encontrar a solução manualmente. Entretanto, sua utilidade é resultado de sua adaptação e aplicação em programas para computadores, utilizando a manipulação de equações algébricas por meio de métodos matriciais, que é uma forma muito adequada para as linguagens computacionais existentes (MCCORMAC, 2015).

Embora o computador tenha diminuído o tempo necessário para os cálculos em uma análise estrutural, o projetista ainda precisa ter um discernimento básico sobre todos os tipos de falha em potencial para avaliar a confiabilidade das soluções geradas pelo computador. A preparação de um modelo matemático que represente adequadamente a estrutura continua sendo um dos aspectos mais importantes na análise (LEET; UANG; GILBERT, 2009).

A maioria dos programas de computador para análise de estruturas é escrita para produzir uma análise de primeira ordem; isto é, eles presumem primeiramente, que o comportamento é linear e elástico; que as forças dos membros não são afetadas pelas deformações (mudança na geometria) da estrutura e que nenhuma redução na rigidez à flexão é produzida nas colunas por forças de compressão. (LEET; UANG; GILBERT, 2009)

O nível de simplificação envolvido na concepção de um modelo estrutural analítico pode ser muito variável, mesmo no caso de modelo de barras. Como exemplo, em um modelo de primeira ordem, é considerado que os deslocamentos dos

pontos da estrutura são muito pequenos quando comparados com as dimensões geométricas de suas seções transversais (MARTHA, 2010).

Ainda, Segundo Martha (2010), adotando essa hipótese é possível estabelecer condições de equilíbrio na geometria original da estrutura (sem deformações), facilitando muito o problema, pois não é necessário determinar os deslocamentos dos pontos da estrutura para escrever as equações de equilíbrio.

“Em uma análise de segunda ordem deve-se levar em consideração os deslocamentos na imposição das condições de equilíbrio, o que faz com que o problema tenha um comportamento não linear, é a chamada não linearidade de ordem geométrica” (MARTHA, 2010, p.409).

Uma forma aproximada de se realizar uma análise não linear é através de uma análise linear incremental explícita, onde a matriz de rigidez é atualizada para a carga Δf , e um novo incremento de carga Δf é aplicado a estrutura para o cálculo do novo incremento dos deslocamentos (VAZ, 2011).

Para essa análise, segundo Vaz (2011), têm-se como primeiro passo, a execução de uma análise linear para determinar as forças em cada barra, essa análise é feita com a matriz global representada pela matriz elástica K_e . Em uma segunda iteração, a matriz de rigidez total seria obtida pela soma da matriz elástica K_e com a matriz geométrica K_g , obtida da primeira iteração. Com as novas matrizes de rigidez, um novo vetor de deslocamentos é calculado. Esse processo é repetido iterativamente até a convergência do vetor dos deslocamentos d .

A problemática associada a concepção de modelos discretos é comum tanto à análise linear quanto à análise não linear. Por isso, torna-se fundamental na concepção de modelos discretos, o uso de programas de computador (MARTHA, 2010).

Existe a possibilidade de inserir um nó (ponto de discretização) no interior de uma barra, subdividindo-a em duas, essa subdivisão pode ser ilimitada, ou seja, pode-se dividir elementos de barra em mais elementos conforme a necessidade da estrutura, essa simplificação é conveniente para simplificar a ação de uma força concentrada no interior de uma barra ou de uma força distribuída que abrange parcialmente o vão da barra (MARTHA, 2010).

Também existem casos em que a discretização pode ser um artifício de modelagem que melhora a qualidade dos resultados, por exemplo, em uma barra com seção transversal variável, ao se discretizar em vários elementos de barra tem-se uma

aproximação para seu comportamento analítico e a qualidade dos resultados melhora a medida em que mais elementos de barra são utilizados (MARTHA, 2010).

A geometria global do modelo é indicada através das coordenadas nodais, definidas em um sistema de eixos globais, para cada nó, fornecem-se um número (ou um índice) e suas coordenadas. Em um caso de estrutura plana, são as coordenadas em relação aos eixos globais X e Y (MARTHA, 2010).

“As restrições de apoios são informadas para cada nó e indicam os graus de liberdade fixos, livres ou com um apoio elástico” (MARTHA, 2010, p.418).

A maneira como as barras se interconectam, é fornecida pelo programa de computador com base em uma informação que se costuma denominar incidência nodal dos elementos. Essa informação permite que a matriz de rigidez global do modelo seja montado de maneira muito eficiente. Para cada barra informa-se o número de seu nó inicial e de seu nó final. Esse número é utilizado para definir suas coordenadas (MARTHA, 2010).

Na informação sobre os dois nós de uma barra, é importante a ordem em que os índices são fornecidos, pois definem o sentido do eixo local x da barra, orientando a mesma do nó inicial para o final (MARTHA, 2010).

A implementação computacional de um programa para análise de estruturas reticuladas ou continuas precisa de muitos métodos e procedimentos para executar uma análise estrutural, tais como estruturas de dados e procedimentos para a criação do modelo geométrico, geração de um modelo discretizado, aplicação de atributos de análise (propriedades dos materiais, carregamentos, condições de suporte, etc.) e visualização de resultados são fundamentais (MARTHA, 2010).

Segundo Martha (2010), para ilustrar de forma simplificada o tipo de informação que é fornecida para um programa de computador deve-se caracterizar os grupos de dados necessários para o programa realizar as seguintes tarefas:

1. Montar o sistema de equações de equilíbrio do método da rigidez direta.
2. Resolver o sistema (determinando valores de deslocamentos e rotações dos graus de liberdade livres).
3. Calcular reações de apoio.
4. Determinar os esforços internos nas extremidades das barras nas direções de seus eixos locais.

E Martha (2010) ainda diz que, cada programa define um formato próprio para esses dados, os tipos de dados, entretanto, são comuns a maioria dos programas e podem ser classificados nos seguintes grupos:

- Coordenadas nodais e restrições de apoio;
- Incidência nodal das barras e propriedades dos seus materiais e das suas seções transversais – grupo que também fornece informações sobre liberações de continuidade, como em rotulas, por exemplo;
- Recalques de apoio;
- Cargas nos nós propriamente ditas;
- Carregamentos no interior das barras.

Em geral, um programa de computador fornece, em forma de texto, os esforços internos nas extremidades das barras de acordo com a direção de seus eixos locais. Os valores seguem a convenção de sinais mostrada anteriormente na Figura 11. Para transformar estes resultados textuais em um traçado de diagramas de esforços internos e preciso converte-los para a convenção usual adotada (MARTHA, 2010).

A análise por computador é igualmente simples para estruturas determinadas e indeterminadas. Contudo, se esta produzir resultados ilógicos, os projetistas deverão considerar a forte possibilidade de que estão analisando uma estrutura instável. (LEET; UANG; GILBERT, 2009).

2.2 MATERIAIS E MÉTODOS

Nessa seção, serão apresentados os materiais utilizados para a conclusão dos objetivos bem como a metodologia de emprego desses materiais. Primeiramente por esse trabalho se tratar de uma pesquisa em referências bibliográficas, foram buscadas informações acerca dos métodos a serem empregados em livros, dissertações de mestrado, teses, entre outros, a fim de construir o conhecimento necessário para a implementação do código computacional a ser desenvolvido.

Serão descritos também os processos a serem realizados em computador, além de uma explicação prévia a respeito do software a ser utilizado.

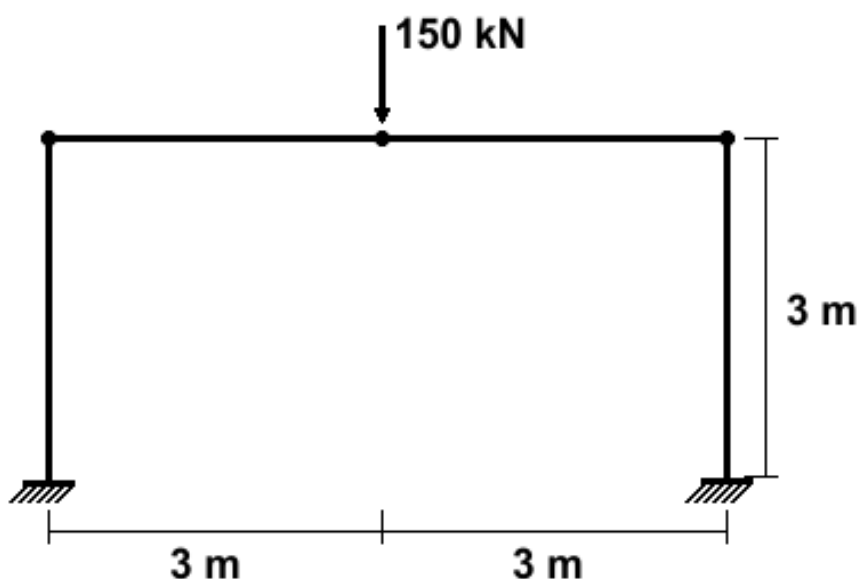
2.2.1 Gnu Octave

O Octave é um programa de linguagem aberta, que possui uma interface por linha de comandos para a solução numérica de problemas lineares e/ou não lineares e implementar outros experimentos numéricos. É um "software" interativo voltado para o cálculo numérico. Faz análise numérica, cálculo com matrizes, processamento de sinais e construção de gráficos em ambiente fácil de usar, onde problemas e soluções são expressos somente como eles são escritos matematicamente, ao contrário da programação tradicional, os elementos básicos de informação é uma matriz que não requer dimensionamento (GNU OCTAVE, 2017).

O Octave possui muitas ferramentas para a solução numérica de problemas comuns de álgebra linear, para a determinação de raízes de equações, polinômios e integração de equações diferenciais e equações diferenciais algébricas. Programas como o Octave são usados frequentemente no lugar de linguagens de programação científica como o C ou Fortran, por já terem embutidas muitas ferramentas numéricas e permitirem a visualização gráfica dos resultados de forma mais fácil. A versão do Octave utilizada para este trabalho é a versão 4.2.0 de 2016 (GNU OCTAVE, 2017).

2.2.2 Metodologia para a Análise

Figura 15 – Pórtico adotado para análise no Octave (2016)



Fonte: O próprio autor

Usando o pórtico da Figura 15 como modelo para calcular a estrutura, primeiramente, para se fazer a análise computacional, insere-se os dados necessários para as primeiras operações serem realizadas, como o Módulo de Elasticidade (E), a largura da seção da viga (b_w), a altura da mesma (h), bem como a área (A) e o momento de inércia (I), que se encontram em função da largura e da altura da seção. Também se faz algumas simplificações, para não precisar fazer uma multiplicação várias vezes, é usada uma nova expressão que represente essa multiplicação nas próximas, por exemplo, para não precisar multiplicar o momento de inércia pelo módulo de elasticidade cada vez, é criada a expressão EI que funciona como um atalho para essa operação.

Em seguida foram definidas as coordenadas dos nós em pares ordenados no plano cartesiano, onde x corresponde a primeira coluna representando o plano horizontal e y a segunda correspondendo ao plano vertical.

Para idealizar a viga divide-se a mesma em dois elementos, um segmento do nó 1 ao nó 2 e outro do nó 2 ao nó 3, informando ao programa a quantidade de nós, graus de liberdade em cada nó e de elementos para calcular os esforços solicitantes.

Informa-se também, a quantidade de graus de liberdade que existem em cada nó, os deslocamentos e as forças na matriz inteira que gerara um vetor com nove linhas e uma coluna, pois como mostrado, há 3 graus em cada nó e ao informar o número de nós encontra-se o total de linhas.

Define-se também as forças externas que agem no elemento em em qual grau de liberdade estão atuando.

Como foi citado no item 2.1.1.2, é necessário definir as condições dos apoios (condições de contorno), definindo quais graus de liberdade estarão restringidos, por exemplo, na viga bi apoiada do trabalho define-se que no primeiro nó o grau de liberdade relacionado a esforço horizontal (grau de liberdade 1), e nos dois nós, as forças relacionadas ao cisalhamento (graus de liberdade 2 e 8) estarão restringidas.

Após definidas estas características, segue-se para a aplicação da matriz de rigidez global onde, definindo o comprimento (L) de cada segmento encontra-se, através de sua inversa, o vetor dos deslocamentos, que ao ser multiplicado pela matriz individual de cada elemento, resulta nos esforços internos solicitantes.

Encontrado os momentos fletores e os esforços cortantes através da matriz de rigidez, passa-se ao dimensionamento da área de aço necessária para a viga em questão através de fórmulas e expressões descritas na NBR 6118 (ABNT, 2014),

onde, usando um f_{ck} para o concreto e um f_{yk} para o aço (simbologia que representa a resistência característica do concreto a compressão e resistência característica ao escoamento do aço respectivamente), um cobrimento, um diâmetro de estribo e um diâmetro de barra longitudinal arbitrários, encontra-se uma altura útil para a viga, a posição da linha neutra para definir o domínio da viga, para seu posterior dimensionamento.

Depois de definida a melhor solução para o dimensionamento da viga, passa-se ao dimensionamento dos pilares, onde se define novamente uma seção para o mesmo, além de um f_{yk} e um f_{ck} para o aço e o concreto a serem utilizados.

Como não se sabe ao certo a posição da linha neutra do pilar, divide-se sua altura total em 20 partes, e faz-se o programa calcular os momentos e os esforços normais resistentes para cada uma destas parcelas consideradas como posição da linha neutra para um pilar em concreto simples (sem armadura).

Após esse procedimento, usando o ponto de máximo momento fletor resistente, estuda-se os acréscimos de resistência provocados pela aplicação da armadura no pilar, onde se encontram acréscimos de tração em um bordo e de compressão em outro.

Após encontrar os acréscimos de resistência, compara-se o momento e o esforço normal resistente com o momento e o esforço cortante gerado nos apoios da viga, onde verifica-se se o pilar resiste as cargas e aos momentos do pórtico em questão, e o processo pode ser repetido para os demais pontos da linha neutra.

Então, após realizada essa análise, os resultados obtidos com o dimensionamento com o octave passam por um processo de comparação com os resultados obtidos em um software comercial.

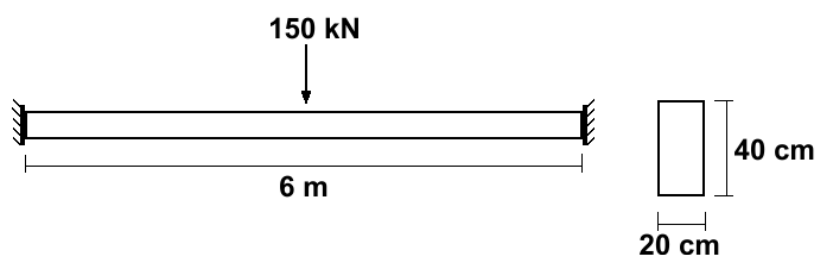
2.3 APRESENTAÇÃO, ANÁLISE DOS DADOS E RESULTADOS

Para este trabalho foi usado primeiramente, como modelo, o pórtico da Figura 15, mostrado anteriormente, porém pode ser usado para qualquer idealização de pórtico, desde que suas variáveis sejam aplicadas corretamente.

2.3.1 Dimensionamento da Viga

Primeiramente, para a montagem do script, fazendo uma análise simples de uma viga, será adotado, como observado na Figura 16 a seguir, como primeiros dados, uma base (b_w) de 20 cm e uma altura (h) de 40 cm. O f_{ck} adotado para os cálculos é o do concreto C25 é 25 Mpa e o f_{yk} do aço é igual a 500 Mpa. Para os cálculos é adotado um módulo de elasticidade igual a 33,6 Gpa. A NBR 6118 (ABNT, 2014) define que pode ser admitido o valor de 210 Gpa para o aço na falta de ensaios ou valores fornecidos pelo fabricante, porém para o concreto usa-se um valor de $1,2.5600.\sqrt{f_{ck}}$ para concretos de classe C20 a C50 com agregado graúdo de basalto (por isso o uso do 1,2), o que resulta em 33,6 Gpa para um f_{ck} de 25 Mpa.

Figura 16 - Viga exemplo para uso no octave

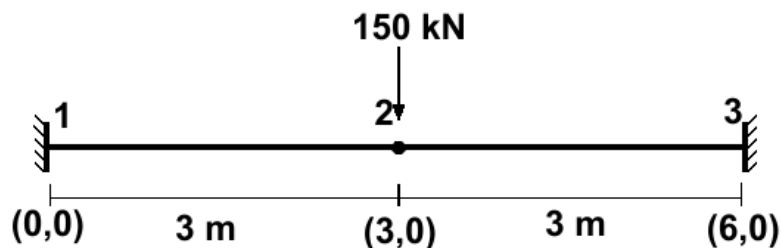


Fonte: O próprio autor

Com a base e a altura da viga define-se a área da seção transversal (A) formula multiplicando um valor pelo outro e também o momento de inércia (I), que em uma seção retangular é obtida multiplicando a base pela altura elevada ao cubo e dividindo o resultado por 12 obtendo um $A = 0,08 \text{ m}^2$ e um $I = 0,001067 \text{ m}^4$.

Como a viga representada na Figura 16 possui 6 m de comprimento e a carga aplicada está no centro da viga, divide-se a mesma em 2 elementos, definindo em um sistema de coordenadas, como explicado no item 2.1.3 e mostrado na Figura 17 e a posição dos nós nas extremidades desses elementos. Como se trata de uma análise plana da viga, coloca-se no eixo x , os valores correspondentes ao comprimento na horizontal, e em y , o valor correspondente ao eixo vertical que na viga da Figura 16 é constante, obtendo os seguintes pares ordenados: para o nó 1 tem-se $x=0$ e $y=0$, para o nó 2, $x=3$ e $y=0$ e para o nó 3 $x=6$ e $y=0$.

Figura 17 – Representação no sistema de coordenadas



Fonte: O próprio autor

Desse modo, define-se que o elemento 1 tem um comprimento que varia em x do nó 1 ao nó 2, correspondendo a 3 m e o elemento 2 que varia do nó 2 ao nó 3 também possui 3 m de comprimento, logo o L a ser adotado é automaticamente calculado pelo octave e posteriormente usado na matriz de rigidez.

E necessário informar ao programa a quantidade de graus de liberdade em cada nó para que este saiba informar quantos deslocamentos serão encontrados, na viga da figura são 3 graus em cada nó. Também é necessário informar quais deslocamentos serão restringidos, como a viga tem em seus apoios uma condição de engastamento, os graus de liberdade do primeiro nó (1,2 e 3), e os do terceiro (7,8 e 9) serão adotados como graus restringidos e não gerarão deslocamentos no vetor, pois seu valor é nulo.

Para o programa informar a matriz global são usadas equações que determinam o número de coeficientes de rigidez da matriz em função do número de nós, pois como existem 3 graus de liberdade em cada nó e na viga da figura existem 3 nós, gerarão uma matriz de ordem 9, com 9 coeficientes ordenados na matriz de acordo com a ordem de cada grau de liberdade.

A seguir foi definida uma força aleatória para ser usada, foi colocada no segundo nó, no grau de liberdade 5, uma força de 150kN, que pode ser interpretada como um esforço cortante de outra viga que está apoiada sobre a mesma. Para encontrar os deslocamentos e depois os esforços internos, é formado o seguinte vetor de forças:

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -150 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

A matriz gerada pode ser multiplicada pela matriz de rotação, porém, como se trata de uma viga e as coordenadas em y são iguais a zero, a matriz de rotação será igual a matriz identidade, o que faz com que a matriz global seja igual a matriz local, então, ao substituir os valores de E, I, A e L, que foram especificados no início dessa seção, geram a seguinte matriz global (K_1):

$$K_1 = \begin{bmatrix} 896000 & 0 & 0 & -896000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15929 & 23893 & 0 & -15929 & 23893 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 23893 & 47787 & 0 & -23893 & 9.5573e & 0 & 0 & 0 \\ -896000 & 0 & 0 & 1792000 & 0 & 0 & -896000 & 0 & 0 \\ 0 & -15929 & -23893 & 0 & 31858 & 0 & 0 & -15929 & 23893 \\ 0 & 23893 & 23893 & 0 & 0 & 95573 & 0 & -23893 & 23893 \\ 0 & 0 & 0 & -896000 & 0 & 0 & 896000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -15929 & -23893 & 0 & 15929 & -23893 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 23893 & 23893 & 0 & -23893 & 47787 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Como explicado na seção 2.1.4, o vetor das forças é igual a matriz de rigidez vezes o vetor dos deslocamentos, porém, no script, o que se procura são os deslocamentos, logo, deve-se multiplicar a inversa da matriz de rigidez global pelo vetor de forças. O octave tem algumas funções predefinidas, que podem ser usadas para facilitar o trabalho, por exemplo, a matriz inversa da matriz de rigidez global é obtida colocando o comando “inv” na frente a matriz como mostrado na equação a seguir:

$$U = \text{inv}[K_1] \cdot [F] \quad (46)$$

Gerando o seguinte vetor de deslocamentos como resposta:

$$U = \begin{bmatrix} 0,00 \\ -0.75335 \\ 0,00 \end{bmatrix} \quad (47)$$

Como os graus de liberdade restringidos não geram resposta no programa por serem nulos, faz-se necessário o uso de um vetor de deslocamentos total considerando os deslocamentos nesses graus igual a zero como no vetor a seguir:

$$U = \begin{bmatrix} 0,00 \\ 0,00 \\ 0,00 \\ 0,00 \\ -0.0047084 \\ 0,00 \\ 0,00 \\ 0,00 \\ 0,00 \end{bmatrix} \quad (48)$$

Para encontrar os esforços solicitantes no primeiro elemento, através do vetor dos deslocamentos, usa-se a matriz de rigidez do primeiro elemento, que é uma matriz 6x6 pelos 6 primeiros elementos, ou pode-se usar a matriz do segundo elemento multiplicada pelos elementos da quarta a nona linha do vetor como mostrado nas equações a seguir:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 896000 & 0 & 0 & -896000 & 0 & 0 \\ 0 & 15929 & 23893 & 0 & -15929 & 23893 \\ 0 & 23893 & 47787 & 0 & -23893 & 9.5573e \\ -896000 & 0 & 0 & 1792000 & 0 & 0 \\ 0 & -15929 & -23893 & 0 & 31858 & 0 \\ 0 & 23893 & 23893 & 0 & 0 & 95573 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,00 \\ 0,00 \\ 0,00 \\ 0,00 \\ -0.0047084 \\ 0,00 \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 1792000 & 0 & 0 & -896000 & 0 & 0 \\ 0 & 31858 & 0 & 0 & -15929 & 23893 \\ 0 & 0 & 95573 & 0 & -23893 & 23893 \\ -896000 & 0 & 0 & 896000 & 0 & 0 \\ 0 & -15929 & -23893 & 0 & 15929 & -23893 \\ 0 & 23893 & 23893 & 0 & -23893 & 47787 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,00 \\ -0.0047084 \\ 0,00 \\ 0,00 \\ 0,00 \\ 0,00 \end{bmatrix} \quad (50)$$

Resultando nos seguintes vetores de esforços:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 75 \\ 112,5 \\ 0 \\ -75 \\ 112,5 \end{bmatrix} e F_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -75 \\ -112,5 \\ 0 \\ 75 \\ -112,5 \end{bmatrix} \quad (51)$$

Interpretando esses resultados, tem-se que:

- O grau de liberdade 1 corresponde a um esforço normal no apoio de 0 kN
- O grau de liberdade 2 corresponde a um esforço cortante no apoio de 75 kN
- O grau de liberdade 3 corresponde a um momento fletor no apoio de 112,5 kN.m
- O grau de liberdade 4 corresponde a um esforço normal no centro de 0 kN
- O grau de liberdade 5 corresponde a uma variação no esforço cortante no centro de - 150 kN, passando de 75 a -75 kN.
- O grau de liberdade 6 corresponde a um momento fletor no centro de 112,5 kN.m
- O grau de liberdade 7 corresponde a um esforço normal no apoio de 0 kN
- O grau de liberdade 8 corresponde a um esforço cortante no apoio de 75 kN
- O grau de liberdade 9 corresponde a um a um momento fletor no apoio de 112,5 kN.m

Logo, para o dimensionamento da armadura longitudinal, pode ser usado como momento no primeiro apoio, o valor absoluto do elemento F_1 [3,1]. Para o momento no centro, os valores absolutos tanto do elemento F_1 [6,1] como do F_2 [3,1], que são iguais e para o segundo apoio, o valor absoluto do elemento F_2 [6,1].

A seguir, passa-se ao dimensionamento da armadura para resistir a esses esforços solicitantes. Adotando um concreto C25, com f_{ck} igual a 25 Mpa.

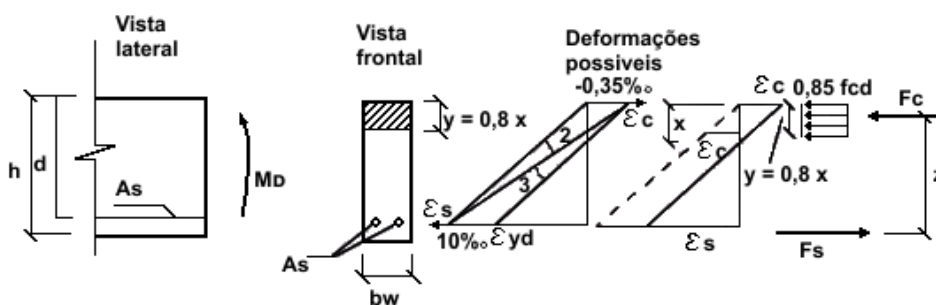
Como valor, calculando primeiramente para o máximo momento positivo, que está no meio do vão, adota-se para o primeiro momento, o elemento F_1 [6,1] que é igual a 112,5 kN.m multiplicado pelo fator de segurança que majora a solicitação em 40%, definido em norma, resultando em um momento de cálculo (M_d) igual a 157,5 kN.m. Isso se faz porque deve-se garantir que o momento resistente usado para o dimensionamento da viga seja maior ou igual ao momento solicitante.

Segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014), em seu item 17.2.2, a distribuição de tensões no concreto se faz de acordo com o diagrama parábola retângulo com tensão de pico igual a $0,85 f_{cd}$, com f_{cd} definido conforme a classe do concreto a ser utilizado. Esse diagrama pode ser substituído pelo retângulo de altura $0,8 x$ (onde x é a profundidade da linha neutra), com a seguinte tensão:

- $0,85 f_{cd}$ no caso da largura da seção, medida paralelamente à linha neutra, não diminuir a partir desta para a borda comprimida, ou seja, a seção permanecer retangular;
- $0,80 f_{cd}$ no caso contrário.

Como mostrado na Figura 18, o momento de cálculo em relação ao bordo superior é igual a componente de tração (F_s) vezes o braço de alavanca correspondente a altura útil da seção (d), que gera um momento no sentido horário, menos a componente de compressão (F_c) vezes o braço de alavanca ($y/2$), que gera um momento no sentido anti-horário.

Figura 18 – Diagramas de tensões e deformações para flexão simples



Fonte: Carvalho e Figueiredo Filho, 2015

Logo, para encontrar a linha neutra e verificar a qual domínio a viga está submetida deve-se usar a equação:

$$M_d = -0,85 \cdot f_{cd} \cdot 0,8 \cdot x \cdot b_w \cdot \frac{0,8x}{2} + 0,85 \cdot f_{cd} \cdot 0,8 \cdot x \cdot d \cdot b_w \quad (52)$$

Onde:

- x é profundidade da linha neutra em relação ao bordo superior, que é a profundidade do local onde as tensões na viga teoricamente são nulas.

- d é a altura útil, que corresponde a distância do centro de gravidade da armadura longitudinal até a face correspondente ao bordo comprimido da viga. Encontrada através da altura total, subtraindo o cobrimento, o diâmetro do estribo e a metade do diâmetro da barra longitudinal (para uma camada de barras, quando houver duas, o centro de gravidade fica entre as duas, quando houver 3, fica no centro da segunda camada, e assim por diante). Na viga dimensionada no octave, foi adotado um cobrimento de 3 cm, estribo de 0,5 mm e barra de 16mm, todos com suas unidades em m, obtendo como d , o resultado de 0,357m.
- b_w é a base da viga, que como dito anteriormente é igual a 20 cm, que também deve estar em metros.
- f_{cd} é o f_{ck} do concreto dividido por 1,4, no caso do concreto C25, com f_{ck} de 25, é igual a 17,857 Mpa.
- M_d é o momento de cálculo obtido através do método da rigidez que foi majorado em 40%, como a unidade do f_{yd} está em Mpa o momento a ser utilizado deve estar em MN.m, portanto deve-se dividir o 189kN.m por 1000, obtendo dessa forma 0,189MN.m.

Como a linha neutra, supostamente é o local onde as tensões são nulas, para encontrá-la basta transformar a equação acima resultando em:

$$0,272.f_{cd}.b_w.x^2 - 0,68.f_{cd}.d.b_w.x + M_d = 0 \quad (53)$$

Resolvendo esta equação, encontram-se, como em todas as equações do segundo grau, duas respostas, porém uma delas resulta em uma posição fora da viga, logo, adota-se a resposta coerente, encontrando para x o valor de 0,25388m.

Após encontrar o valor da profundidade da linha neutra, compara-se este com o valor da altura útil, para verificar a qual domínio a viga está submetida., onde seus limites são obtidos a partir de x em função de d e são definidos a seguir conforme a figura e a equação a seguir:

- Domínio 3: x entre $0,259d$ e qualquer valor menor ou igual a $0,628d$
- Domínio 4: x entre $0,628d$ e qualquer valor menor ou igual a d
- Domínio 4a: entre d e qualquer valor positivo maior que d (fora da seção)
- Domínio 5: entre d e qualquer valor positivo maior que d ($\varepsilon_{cu}/0$).

Para o cálculo da área de aço na viga de concreto armado são usados principalmente os limites entre os domínios 3 e 4 pois conforme a NBR 6118 (ABNT, 2014), deve-se evitar o dimensionamento com a posição da linha neutra no domínio 4, pois o mesmo está associado a ruptura frágil do elemento.

Como $0,628d$ foi igual a $0,224m$, e o x resultou maior que este valor e menor que d , a viga encontra-se no domínio 4, havendo a necessidade de posicionar uma armadura dupla para resistir a compressão e diminuir a posição da linha neutra para que esta fique no domínio 3.

A norma NBR 6118 (ABNT, 2014, p.122) em seu item 17.2.3 diz que: “Nas vigas é necessário garantir boas condições de ductilidade respeitando os limites da posição da linha neutra (x/d) dados em 14.6.4.3, sendo adotada, se necessário, armadura de compressão”.

“Para proporcionar o adequado comportamento dútil em vigas e lajes, a posição da linha neutra no ELU deve obedecer aos seguintes limites: a) $x/d \leq 0,45$, para concretos com $f_{ck} \leq 50$ MPa; b) $x/d \leq 0,35$, para concretos com $50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}$ ” (NBR 6118, ABNT, 2014, p. 91).

Portanto para se calcular a parcela do momento que a armadura dupla deve resistir, usa-se a posição limite da linha neutra (x_{lim}) que é igual a $0,45d$, na formula:

$$Md_{lim} = (0,8 * x_{lim} * bw * 0,85 * f_{cd}) * (d - 0,4 * x_{lim}) * 1000 \quad (55)$$

Que é a mesma fórmula que a da equação número 53, só que a incógnita é o momento, que foi multiplicado por 1000 para se ter a resposta em kN.m. A barra que será adotada para os cálculos primeiramente é a com o diâmetro de 10mm. Após essa escolha, encontra-se o d' através da soma do cobrimento com o diâmetro do estribo e a metade do diâmetro da barra longitudinal, que tem como resultado $0,04m$.

Encontra-se um valor de x' subtraindo d' de x resultando em $0,16065 - 0,04$ que é igual a $0,12065$. Esse x' deve ser multiplicado pela deformação específica de

encurtamento do concreto na ruptura que é 0,35%, e então dividido pelo x_{lim} , resultando em 0.0028755 que é a deformação específica do aço obtida em ϵ'_s (ϵ'_s), a ser utilizada para verificação.

Também deve-se encontrar a deformação específica do aço máxima antes do patamar de escoamento (ϵ_{yd}) que é igual a f_{yd}/E resultando em 0,207%.

Usando a função “if”, o octave compara-se os resultados:

Se ϵ'_s for maior que a ϵ_{yd} , que é o caso desta viga pois $0,00287 > 0,00207$, usa-se $\epsilon'_s = f_{yd}$, e se for menor que 0,00207, usa-se $\epsilon'_s = E \cdot \epsilon'_s$. Já para encontrar a área de aço da armadura dupla, usa a equação:

$$A'_s = \frac{\left(\frac{M_{sd}}{1000} - \frac{M_{dlim}}{1000}\right)}{(d - d') \cdot \epsilon'_s} \quad (56)$$

Novamente dividindo por 1000 os momentos, para transformá-los em MN.m, onde se obtém uma área de aço igual a $3,14 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ que deve ser dividida pela área da seção de cada barra isoladamente para encontrar o número de barras a ser utilizado para cada diâmetro. Resultando em:

- 10,075 barras de 6,3 mm, tendo que adotar 11
- 6,2483 barras de 8,0 mm, tendo que adotar 7
- 3,9989 barras de 10 mm, tendo que adotar 4
- 2,5593 barras de 12,5 mm, tendo que adotar 3
- 1,5621 barras de 16 mm, tendo que adotar 2
- 0,99973 barras de 20 mm, tendo que adotar 1

Ou seja, para esta viga adota-se 4 barras de 10,0 mm, não se adota valores menores que duas barras, pois são necessárias 2 barras pelo menos para fazer a amarração do estribo. Também podem ser escolhidas 3 barras de 12,5mm, cabe ao projetista escolher a melhor opção.

O ideal é refazer os cálculos com o diâmetro de 12,5, caso a mesma seja escolhida pois foi adotado inicialmente um diâmetro de 10 mm, logo, pode-se trocar a barra no cálculo resultando no final em uma nova área de aço, mas com pouca variação em relação a primeira, ainda sendo como resposta 3 barras.

Após encontrada a área de aço necessária para resistir a parcela de compressão a qual o concreto não resiste sozinho, passa-se para o dimensionamento da armadura sujeita a tração.

Para o início dos cálculos da armadura que deve resistir a tração, deve ser encontrada a resistência limite do concreto a compressão, que é de:

$$R_{cclim} = 0.8 * x_{lim} * b_w * 0.85 * f_{cd} \quad (57)$$

Resultando em 0,39015 Mpa. A resistência a tração (R_{st}) deve ser igual a resistência limite do concreto a compressão (R_{cclim}) mais a parcela resistente a tração da armadura dupla (R'_{st}), onde R'_{st} é igual a tensão $\Delta's$ (f_{yd} , ou seja 500/1,15 que é igual a 434,78Mpa) multiplicada pela área de aço encontrada $A's = 3,14 \cdot 10^{-4} m^2$ resultando em $R'_{st} = 0,13656$ Mpa e $R_{st} = 0,5267$ Mpa.

Para encontrar a área de aço necessária para a tração (A_s), divide-se R_{st} por $\Delta's$, obtendo como resposta $0.0012114 m^2$. Deve-se verificar a armadura mínima que na norma deve ser igual a 15%, da área total da seção, logo, é especificada pela fórmula:

$$A_{smin} = 0,0015 * b_w * h \quad (58)$$

Resultando em uma área mínima de $0,00012 m^2$, portanto, como a área é maior que a área mínima, e a área calculada que será utilizada. Também se faz a verificação da área máxima que é igual a 4% da área da seção transversal (substituindo 0,0015 da formula 58 por 0,04 e somando a área de aço de ambos os bordos para esta verificação). Onde A_s resultou menor que a área máxima podendo ser mantida a seção. E em barras ficaria dividida como:

- 38,862 barras de 6,3 mm, tendo que adotar 39
- 24,1 barras de 8,0 mm, tendo que adotar 25
- 15,424 barras de 10 mm, tendo que adotar 16
- 9,8715 barras de 12,5 mm, tendo que adotar 10
- 6,0251 barras de 16 mm, tendo que adotar 7
- 3,8561 barras de 20 mm, tendo que adotar 4

E por último, verifica-se o número de barras que pode ser colocado por camada, adotando um espaçamento de 2 cm entre as barras que se dá pela fórmula:

$$N = (bw - 2 * cob - 2 * est + Esp) / (dm16 + Esp) \quad (59)$$

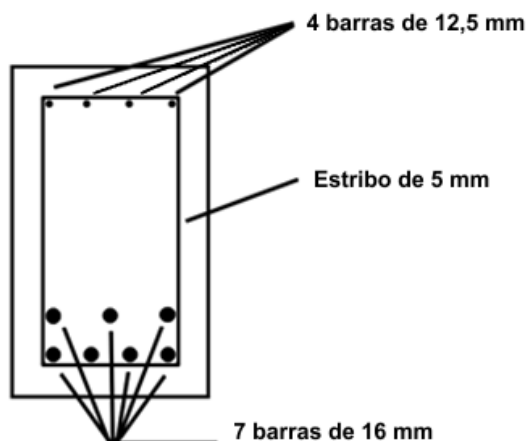
Resultando, para um diâmetro de 16 mm (dm16), que são os 16 mm, ou 0,016m), um cobrimento de 3cm (cob), com espaçamento de 2 cm entre barras (esp. disposto em na NBR 6118, ABNT, 2014 como o maior valor entre: 2cm ou 1,2 vezes a maior dimensão do agregado graúdo ou o diâmetro da barra) e base de 20 cm (bw), um valor de 4,16 barras por camada sendo adotada 4 barras.

O ideal é trocar o centro de gravidade da armadura para uma posição entre as duas camadas, onde segundo a NBR o espaçamento entre essas camadas na transversal é o maior valor entre: 2 cm; 0,5 vezes a maior dimensão do agregado; ou o diâmetro da barra. Onde haverá aumento na área de aço e consequentemente no número de barras. Encontrando como melhor resposta:

- 4 barras de 12mm para a compressão
- 7 barras de 16mm para a tração

Resultando na disposição mostrada na Figura 20, a seguir:

Figura 20 – Detalhamento da seção da viga



Fonte: O próprio autor

Caso a força no grau de liberdade 5 seja trocada por uma força menor, como por exemplo uma força de 50 kN, o processo se repete até o cálculo da profundidade da linha neutra. Mas nesse caso, a viga cairia no domínio 3 e antes do limite imposto para a ductilidade e não haveria a necessidade de calcular armadura para a compressão, logo, através do comando “if”, o octave não calcula essa armadura pois é imposto como condição ao programa, que ele só calcule essa situação quando o x for maior que $0,45d$.

Então o programa usa apenas a fórmula:

$$A_s = \frac{0.85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot 0.8 \cdot x}{f_{yd}} \quad (60)$$

Definindo a área de aço necessária, A_s igual a $3,6495 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, porém a área de aço mínima ainda deve ser verificada, pois se a área calculada der menor que a área mínima, o que não acontece nesse caso, é a área mínima que deve ser utilizada como área de aço. Além da área máxima, que caso seja atingida deve-se aumentar a área da seção. Por isso, essas formulas localizam-se fora do comando, e após essa verificação, é feito o cálculo do total de barras para cada diâmetro:

- 11,708 barras de 6,3 mm, tendo que adotar 12
- 7,26 barras de 8,0 mm, tendo que adotar 8
- 4,6467 barras de 10 mm, tendo que adotar 5
- 2,9739 barras de 12,5 mm, tendo que adotar 3
- 1,8151 barras de 16 mm, tendo que adotar 2
- 1,1617 barras de 20 mm, tendo que adotar 2

Após feito o dimensionamento no centro da viga, é necessário repetir o processo nos apoios, pois existem momentos negativos nos mesmos, porém, só é preciso repetir o código e, ao invés de usar $F1(6,1)$ como momento solicitante, usa-se os valores absolutos de $F1(3,1)$ para o primeiro apoio e $F2(6,1)$ para o segundo apoio, onde ambos são iguais a 112,5 kN.m.

Esse processo obtém como respostas as mesmas do momento no centro do vão, por ter como valor o mesmo momento para cada posição.

Portanto ao adotar a mesma força de 150 kN, como no primeiro caso, resulta em 4 barras de armadura para compressão de 12,5 mm, e 7 barras de 16mm, porém, por se tratar de um momento negativo, para a seção no apoio, estarão dispostas na viga de maneira diferente, com as barras para compressão embaixo e as barras de 16 mm em cima.

2.3.2 Dimensionamento dos Pilares

Como os momentos e os esforços cortantes da viga são os mesmos nos dois apoios, pode-se calcular apenas um pilar e definir as mesmas características para ambos os apoios.

Novamente é são definidos e informados ao octave, alguns parâmetros como a base do pilar (b) igual a 0,2 m e a altura (h_1 , pois se informar com h , haverá conflito de informações pois na viga a altura já foi chamada de h) igual a 0,5 m. Também é informado o f_{ck} , para o pilar nomeado como f_{ckp} e igual a 30Mpa, para ser diferente do da viga, e o f_{yk} , que no aço CA-50 é 500 Mpa.

Primeiramente, como a carga pode não estar perfeitamente centrada no pilar, supõe-se que a altura da viga seja dividida em 20 partes e cada uma dessas posições seja definida como possível posição para a linha neutra.

Após definidas as possíveis posições para a linha neutra, deve-se encontrar os 20 momentos (um para cada posição da linha neutra), e os 20 esforços normais a que a seção resiste (idem), sendo primeiramente estudada uma seção de concreto simples e depois calculado o acréscimo de resistência fornecido pela armadura, a fim de compara-los com os momentos e esforços cortantes que a viga transmite, em forma de momento e esforço normal ao pilar.

A fórmula para encontrar o momento resistente do pilar, consiste em:

$$M_{di} = (0.68 * b * f_{cdp}) * x_{LN}(i) * \left(\frac{h_1}{2} - 0.4 * x_{LN}(i)\right) \quad (61)$$

Onde:

- M_{di} = é o momento resistido pela seção do pilar na posição i da linha neutra, onde i representa a linha no vetor obtido com a divisão da altura em 20 partes.
- b é a largura da dimensão adotada como base para o pilar, de 0,2 m

- f_{cdp} é o f_{cd} do pilar, que por sua vez é o f_{ck} de 30 Mpa dividido por 1,4, ou seja 21,43Mpa.
- x_{lni} é a posição da linha neutra, obtida para cada linha do vetor resultante no octave, que varia da posição 0,00 até 0,5m.
- h_1 b é a largura da dimensão adotada como altura para o pilar, de 0,5 m.

Da divisão da altura em 20 partes, incluindo também a posição 0, obtém-se o vetor:

$$x_{ln} = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,025 \\ 0,050 \\ 0,075 \\ 0,100 \\ 0,125 \\ 0,150 \\ 0,175 \\ 0,200 \\ 0,225 \\ 0,250 \\ 0,275 \\ 0,300 \\ 0,325 \\ 0,350 \\ 0,375 \\ 0,400 \\ 0,425 \\ 0,450 \\ 0,475 \\ 0,500 \end{bmatrix} \quad (62)$$

E M_d , para cada uma dessas posições de x_{ln} resulta em:

- $M_{d1} = 0 \text{ MN.m}$
- $M_{d2} = 0.017486 \text{ MN.m}$
- $M_{d3} = 0.033514 \text{ MN.m}$
- $M_{d4} = 0.048086 \text{ MN.m}$
- $M_{d5} = 0.061200 \text{ MN.m}$
- $M_{d6} = 0.072857 \text{ MN.m}$
- $M_{d7} = 0.083057 \text{ MN.m}$
- $M_{d8} = 0.091800 \text{ MN.m}$

- $Md9 = 0.099086 \text{ MN.m}$
- $Md10 = 0.10491 \text{ MN.m}$
- $Md11 = 0.10929 \text{ MN.m}$
- $Md12 = 0.11220 \text{ MN.m}$
- $Md13 = 0.11366 \text{ MN.m}$
- $Md14 = 0.11366 \text{ MN.m}$
- $Md15 = 0.11220 \text{ MN.m}$
- $Md16 = 0.10929 \text{ MN.m}$
- $Md17 = 0.10491 \text{ MN.m}$
- $Md18 = 0.099086 \text{ MN.m}$
- $Md19 = 0.091800 \text{ MN.m}$
- $Md20 = 0.083057 \text{ MN.m}$
- $Md21 = 0.072857 \text{ MN.m}$

E para encontrar o esforço normal, é usada a fórmula:

$$Nd = (h1/2 - 0.4 * xLN(i)) \quad (63)$$

Resultando em:

- $Nd1 = 0.00000 \text{ MN}$
- $Nd2 = 0.07286 \text{ MN}$
- $Nd3 = 0.14571 \text{ MN}$
- $Nd4 = 0.21857 \text{ MN}$
- $Nd5 = 0.29143 \text{ MN}$
- $Nd6 = 0.36429 \text{ MN}$
- $Nd7 = 0.43714 \text{ MN}$
- $Nd8 = 0.51000 \text{ MN}$
- $Nd9 = 0.58286 \text{ MN}$
- $Nd10 = 0.65571 \text{ MN}$
- $Nd11 = 0.72857 \text{ MN}$
- $Nd12 = 0.80143 \text{ MN}$
- $Nd13 = 0.87429 \text{ MN}$

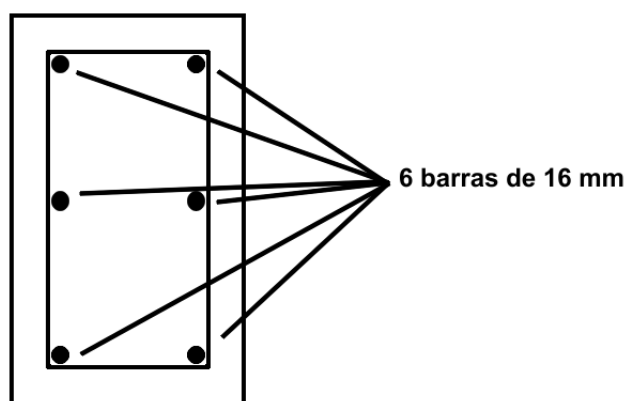
- Nd14 = 0.94714 MN
- Nd15 = 1.02000 MN
- Nd16 = 1.09286 MN
- Nd17 = 1.16571 MN
- Nd18 = 1.23857 MN
- Nd19 = 1.31143 MN
- Nd20 = 1.38429 MN
- Nd21 = 1.45714 MN

Ambas obtiveram 21 respostas por considerar a primeira posição da linha neutra como 0 m.

Depois de calculado a momento e o esforço normal para cada posição de x_{ln} , passa-se ao cálculo do acréscimo de resistência fornecido pela armadura, que também deve ser calculada para cada posição da linha neutra.

Nesta parte, deve-se analisar como as barras estão dispostas no pilar, para efetuar os cálculos, no pilar adotado para este script, estão sendo usadas, a princípio, 6 barras de 16 mm como na figura a seguir:

Figura 21 – Pilar para análise inicial



Fonte: O próprio autor

Também deve ser informada a deformação específica máxima do aço no pilar (no octavo definido como E_{ydp}), para encontrar os acréscimos de resistência a tração e a compressão fornecidos pela armadura. Que para o aço CA-50 e módulo de elasticidade (E) igual a 210 Gpa, é igual a 0,207%.

Com os valores de x_{ln} encontra-se os valores das deformações do aço no bordo comprimido e no bordo tracionado da seção ($EsA1$ e $EsA2$), para cada posição através das formulas:

$$EsA1 = 0.0035 * (x_{ln} - 0,9 * h) / x_{ln}. \quad (64)$$

$$EsA2 = 0.0035 * (x_{ln} - 0,1 * h) / x_{ln}. \quad (65)$$

Onde:

- 0,0035 é a deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura, definida na norma;
- x_{ln} é aleatoriamente definido com cada posição da linha neutra, onde no script, foi escolhido de acordo com a posição do máximo momento resistente, sendo igual a 0,31250 m;
- 0,9h e 0,1h são definidos como posições das armaduras no bordo comprimido e tracionado.

Através dos valores de $EsA1$ e $EsA2$, onde $EsA1$ é igual a -0,00154 e $EsA2$ é igual a 0,00294.

Nas respostas acima, os valores positivos denotam compressão – notação diferente da usual. Portanto, a armadura em 0,1h estará encurtando enquanto a armadura em 0,9h estará alongando para esta posição da linha neutra. E no script então são definidos os acréscimos de resistência a tração pelas fórmulas:

$$Acrt = EsA1 / Eydp * fydp \quad (66)$$

$$Acrt = fydp \quad (67)$$

Existem dois casos, se $EsA1$ for menor que $Eydp$, usa-se a fórmula 66, e se for maior, a usa-se a fórmula 67. Já a resistência a compressão é dada por:

$$Acrc = EsA2 / Eydp * fydp \quad (68)$$

$$Acrc = - fydp \quad (69)$$

Onde deve-se analisar o EsA2, do mesmo modo que EsA1 para escolher entre a fórmula 68 ou 69. Obtendo como resposta para o acréscimo de tração, -323,40Mpa, cujo sinal pode ser desprezado, e para a compressão, o mesmo valor de fydp que é de 434,78 Mpa.

Para calcular o acréscimo de esforço normal (no script identificado como Fsdp) devido a armadura deve-se somar as duas parcelas (Acrt + Acrc) e encontrar através da fórmula:

$$Fsdp = (Acrc + Acrt) * Asp \quad (70)$$

Onde Asp é definido pela quantidade de barras na camada vezes a área de aço da barra escolhida e que para esse cálculo, foram usadas 2 barras de 16mm. Encontrando para o Fsdp o valor de 0,04479 MN.

E para o acréscimo de momento fletor (definido como Msdp), com a fórmula:

$$Msdp = 0.4 * Acrc * h1 * Asp + abs(0.4 * h1 * Acrt * Asp) \quad (71)$$

Onde Asp é 2*fide16, e fide16 no octave, é a área de aço da barra de 16 mm, que é multiplicado por 2 por serem duas barras por camada, e abs é um comando que adota o valor absoluto, ou seja, positivo, da expressão.

Encontrando para Msdp o valor de 0.060977 MN.m.

Após encontrar os acréscimos devidos a armadura (Fsdp e Msdp), soma-se os mesmos com o momento e o esforço normal resistentes da seção de concreto simples, encontrando como resposta os valores de:

$$Ndr = (Nd + Fsdp) = 0,80372 \text{ MN}. \quad (72)$$

$$Mdr = (Md + Msdp) = 0,15584 \text{ MN.m}. \quad (73)$$

Lembrando que esses valores são para a posição 0,31250 m da linha neutra. Para as demais posições deve ser refeito os cálculos desde quando foram encontrados os momentos e esforços normais na seção de concreto simples, e adotar os valores corretos para a nova posição.

Para completar a análise nos pilares verifica-se que os momentos e esforços normais atuantes transmitidos pela viga através de seus momentos e esforços

cortantes aplicados em uma matriz de rigidez montada para o pilar, são menores que os resistentes podendo o pilar ter essa seção.

Nesse dimensionamento, foi considerada apenas uma força de 150 kN aplicada ao centro a viga, considerando essa força como um esforço cortante de outra viga, porém existem as cargas permanentes de peso próprio, de paredes, da laje que está apoiada sobre a viga e cargas acidentais devido ao uso da estrutura, que são cargas que devem ser consideradas como distribuídas e também devem ser analisadas para o correto dimensionamento da viga.

Logo, para efeito de cálculo deve-se transformar esta carga distribuída, em esforços e rotações que possuam um efeito semelhante nos nós da estrutura, como esta viga é uma estrutura bi engastada, usa-se as formulas de acordo com as condições de engastamento, que para os apoios e para o centro possuem respectivamente momentos iguais a:

$$\frac{q \cdot l^2}{12} \text{ e } \frac{q \cdot l^2}{24} \quad (74)$$

Supondo que a carga acidental na laje seja de 2kN/m² (de acordo com a norma NBR 6120 para edifícios residenciais), somada com a carga de peso próprio da laje que em concreto armado, segundo a NBR 6120, possui um peso específico e 25 kN/m³ mais piso, etc. Adota-se então uma altura de 15 cm ficando a carga em torno de 3,75 kN/m². Adotando para esta laje uma área de 36m² e sendo a mesma bi apoiada, transfere-se metade da carga para a viga do exemplo, resultando em uma carga de:

$$\frac{(2+3,75) \cdot 36}{2 \cdot 6} = 17,25 \text{ kN/m} \quad (75)$$

Somada com a carga da parede (que para paredes em alvenaria com tijolos furados, segundo NBR 6120, possuem um peso específico de 13 kN/m³, (adotado 15kN/m³), que deve ser multiplicado pela altura e espessura (adotado 2,7 e 0,15 respectivamente) da parede para fornecer a carga linear da mesma, logo:

$$15 \cdot 0,15 \cdot 2,7 = 6,075 \text{ kN/m} \quad (76)$$

E a carga de peso próprio da viga, que multiplicando o peso específico do concreto armado pela área da seção, onde a área da seção pode ser mudada, mas que para a área inicial resulta em:

$$0,2 * 0,4 * 25 = 2kN/m \quad (77)$$

Somadas as 3 cargas, tem-se uma carga q igual a:

$$q = 17,25 + 2 + 6,075 = 25,325 \text{ kN/m} \quad (78)$$

Também será utilizado uma carga pontual de 75 kN representando o esforço cortante transmitido de outra viga, pois 150 kN foi utilizado apenas para a demonstração dos cálculos com armadura dupla no octave.

Onde, os novos vetores de forças, considerando os efeitos dessa carga (esforços cortantes e momentos fletores) distribuída nos nós serão:

$$F3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 76,125 \\ -76,125 \\ 0 \\ 0 \\ 38,0625 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 37,5 \\ -56,25 \\ 0 \\ 37,5 \\ 56,25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 113,625 \\ -132,375 \\ 0 \\ 37,5 \\ 94,2375 \end{bmatrix} \quad (79)$$

$$F4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 38,0625 \\ 0 \\ 76,125 \\ -76,125 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 37,5 \\ 56,25 \\ 0 \\ 37,5 \\ -56,25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 37,5 \\ 94,3125 \\ 0 \\ 113,625 \\ -132,375 \end{bmatrix} \quad (80)$$

Onde para os cálculos são usados os momentos de 94,3125 kN.m no centro, e 132,375 kN.m nos apoios multiplicados por 1,4 e o processo e dimensionamento é repetido, resultando ao final do dimensionamento da viga em:

- Nos apoios: 3 barras de 20mm para a compressão mais 5 barras de 20mm para a tração.
- No centro: 2 barras de 12,5mm para a compressão mais 6 barras de 16mm para a tração.

E comparando o esforço cortante e o momento que será passado ao pilar com os esforços resistentes chega-se à conclusão que o momento resistente do pilar ($M_{dr}=155,84 \text{ kN.m}$) é menor que o momento transmitido pela viga ao apoio encontrado através da matriz de rigidez do pilar que é de $185,375 \text{ kN.m}$, portanto, deve-se acrescentar mais barras para resistir ao momento. Já para o esforço normal resistido pelo pilar ($N_{dr} = 963,7 \text{ kN}$), que é maior que o esforço cortante da viga no apoio, não haveria necessidade. Logo, repete-se o cálculo acrescentando 2 barras de 16 mm , chegando a um momento resistente de $203,03 \text{ kN.m}$, obtendo uma área de aço suficiente para resistir ao momento se este for aplicado no centro do pilar.

Porém, a NBR 6118 (ABNT, 2014) define que a verificação não deve ser feita apenas para o centro do apoio. Portanto foi feita uma verificação até a posição $0,2h$ onde o momento atuante seria de $209,186 \text{ kN.m}$ e o momento resistente de $147,785 \text{ kN.m}$ sendo necessário aumentar a área de aço. Então, com o acréscimo de mais duas barras de 16 foi chegado a um momento resistente de $212,31 \text{ kN.m}$ que suporta o momento transmitido ao pilar.

2.3.3 Comparação de Resultados

Para comparação dos resultados obtidos, foi realizado uma análise através do software Eberick v8 gold (2013) da Alto Qi, que é um software para projeto estrutural que engloba as etapas de lançamento, análise da estrutura, dimensionamento até o detalhamento final dos elementos.

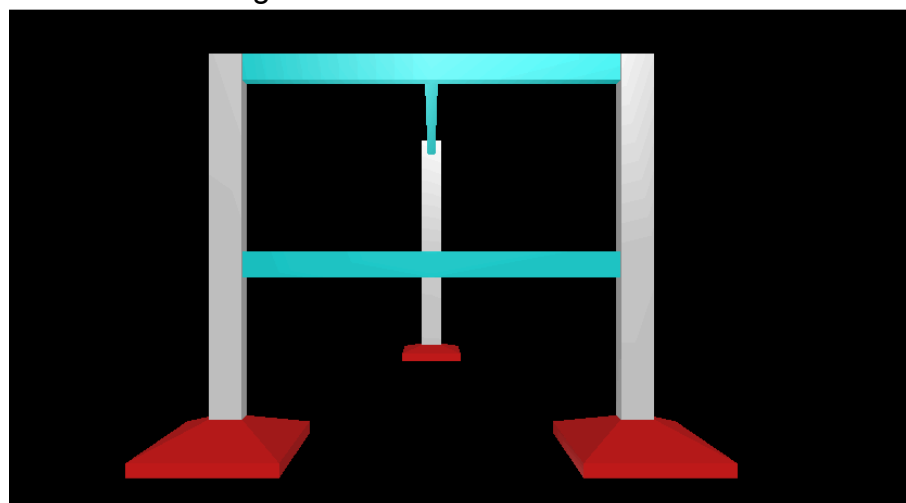
Trata-se de um programa com diversos recursos que proporcionam alta produtividade na elaboração dos projetos e no estudo de diferentes soluções para um mesmo projeto. Possui um poderoso sistema gráfico de entrada de dados, associado à análise da estrutura em um modelo de pórtico espacial, e a diversos recursos de dimensionamento e detalhamento dos elementos que está de acordo com as disposições da NBR 6118 (ABNT, 2014), além da visualização tridimensional da estrutura modelada (KADPRO, 2017).

Foi desenhado um pórtico com 2 pavimentos semelhantes e desprezados alguns efeitos de segunda ordem que o Eberick considera em seus cálculos, porém um pavimento considerando a viga engastada no pilar, e outro considerando rotulada, com os mesmos dados iniciais:

- Seção de 20x40cm
- Vão de 6m (vão este que segundo a NBR 6118 é o vão efetivo, que corresponde a soma da distância entre as faces dos pilares mais o menor valor entre 0,3h e 0,5 vezes a altura da seção do pilar, portanto, se a seção for alterada no eberick o vão efetivo também será alterado)
- Carga linear de 23,375 kN, como o eberick já calcula o peso próprio da viga, não há necessidade de acrescentar essa carga.
- E para a representação da carga pontual foi apoiada uma segunda viga com a mesma carga da primeira.
- Foram definidas as posições dos pilares com 5,76m de distância entre suas faces e para a altura dos mesmos foi definida no início da análise com o lançamento dos pavimentos uma altura de 3m, com a mesma seção de 20x50cm (como a viga tem 40 cm de altura e $0,4 \times 40 = 12\text{cm}$, o vão efetivo ficou igual ao do exemplo resultando em 6m).

Ficando o pórtico como o da figura abaixo:

Figura 22 – Pórtico 3d no Eberick



Fonte: O próprio autor

E obteve-se como resposta, para os momentos de cálculo:

- Na Viga do pavimento superior: 319,73 kN.m no centro da viga, e nos apoios, 0 kN.m (no eberick). Mesma resposta do octave, por ser considerada rotulada.

- Na viga do pavimento inferior: 140,27 kN.m no centro da viga, e nos apoios, 179.47 kN.m (no Eberick). E 133,22 kN.m no centro da viga e 186,51 kN.m nos apoios (no Octave).

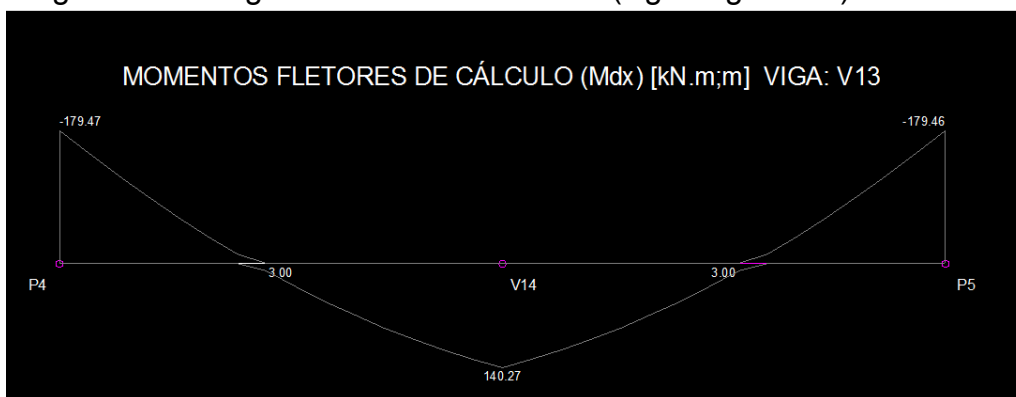
Foi realizada pesquisa para tentar descobrir a razão da diferença no segundo caso, e foi constatado que pode ser uma redistribuição de esforços que o Eberick faz e que segundo a norma NBR 6118 (ABNT, 2014), é decorrente da variação de rigidez dos elementos estruturais. Não é obrigatória, mas quando realizada para concretos com f_{ck} menor que 35 MPa é limitada pela fórmula: $x/d \leq (\delta - 0,44) / 1,25$, com δ igual ao coeficiente que é multiplicado pelo momento negativo para se encontrar o momento de redistribuição linear máxima.

Porém, após feita manualmente, a fórmula resulta em uma redistribuição máxima maior que a utilizada no Eberick, e então supõe-se que o mesmo se utilize de algum item, parcela ou índice que possa ter passado despercebido nessa pesquisa.

A relação x/d encontrada no software Eberick é 0,5, diferente do 0,45 adotado para satisfazer as condições de ductilidade da norma NBR 6118 (ABNT, 2014), porém, segundo a mesma norma, na versão de 2003, o limite máximo com ou sem redistribuição de esforços a ser adotado pode ser de 0,5 (então para a comparação dos resultados será usado o mesmo limite).

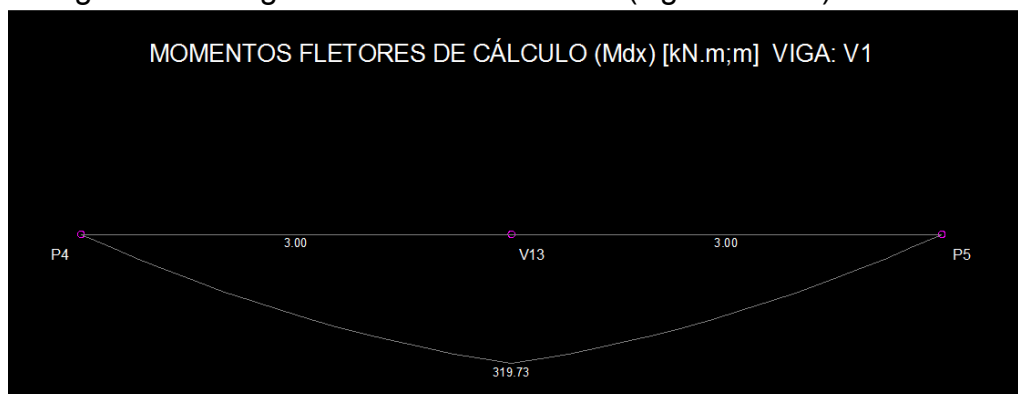
Ficando os diagramas de momentos fletores como os mostrados a seguir:

Figura 23 – Diagrama de momento fletor (viga engastada) no Eberick



Fonte: O próprio autor

Figura 24 - Diagrama de momento fletor (viga rotulada) no Eberick



Fonte: O próprio autor

Os momentos da Figura 24 resultaram iguais porque a NBR 6118 (ABNT, 2014) define que não é ideal fazer essa redistribuição em vigas consideradas bi apoiadas.

Ao alterar o limite correspondente a ductilidade de 0,45 para 0,5 e posicionar o centro de gravidade conforme a armadura a ser adotada obtém-se as respostas que serão mostradas a seguir para cada elemento separadamente.

Para mostrar e comparar os resultados quanto ao dimensionamento serão adotados os mesmos momentos encontrados no eberick, porém os resultados com os momentos do Octave também são aceitáveis, só que são definidos como uma análise sem redistribuição.

2.3.3.1 Viga 1

Como citado anteriormente a viga 1, teve como momento de cálculo atuante 319,72 kN.m (mostrado também na Figura 23). Ao calcular a área de aço necessária no octave chegou-se a uma área $A_s = 25,263 \text{ cm}^2$ para a tração e $A'_s = 16,742$, e, ao somar as duas áreas a resposta superou a máxima área de aço (32 cm^2) permitida para a viga.

Logo a única solução para a viga não trabalhar no domínio 4 é o aumento da seção da mesma.

Então foi feita a alteração da altura da viga para 50 cm, alterando as cargas de peso próprio e o vão efetivo da viga e consequentemente o momento para 327,75 kN.m.

Após o posicionamento do centro de gravidade para barras de 20mm, foi encontrado como respostas:

- No octave: $A's = 9,97 \text{ cm}^2$ e $A_s = 21,56 \text{ cm}^2$
- No eberick: $A's = 9,43 \text{ cm}^2$ e $A_s = 20,96 \text{ cm}^2$

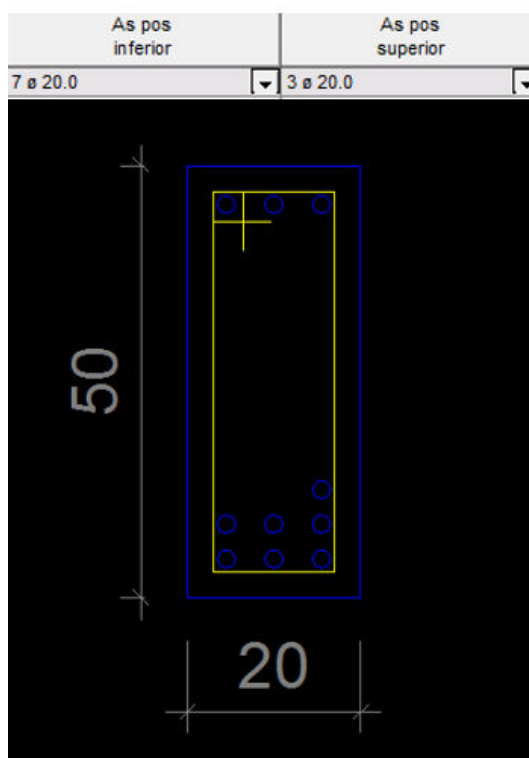
A diferença se dá por critérios de arredondamento de variáveis, também pelo fato de o eberick fazer várias iterações para usar os dados no dimensionamento, etc.

E no detalhamento para uma seção de 20x50 no octave obteve-se como respostas 6,83 barras de 20 para a tração e 3,14 barras de 20 para a compressão. Podendo serem dispostas até 3 barras por camada. Os resultados no octave são aceitáveis perante a norma pois mesmo que se usem 10 barras de 20mm a área de aço máxima de 4% da seção não será ultrapassada

O motivo do uso das barras de 20mm é pelo fato de barras menores exigem mais camadas para serem dispostas e a NBR 6118 (ABNT, 2014) define que a distância do centro de gravidade da armadura até a face da barra mais afastada do mesmo não pode ser superior a 10% da altura da viga.

E no software Eberick foi obtido o detalhamento mostrado na Figura 25, a seguir:

Figura 25 – Detalhamento da Viga 1 no Eberick



Fonte: O próprio autor

2.3.3.2 Viga 2

Para a viga 2 foram usados os mesmos dados iniciais, a única mudança em relação a viga 1 foi a imposição de uma ligação rígida (engaste) entre viga e apoios.

E como o objetivo, é comparar resultados foi também utilizado para o dimensionamento os momentos após a redistribuição como mostrado na Figura 24.

Chegando na seguinte situação:

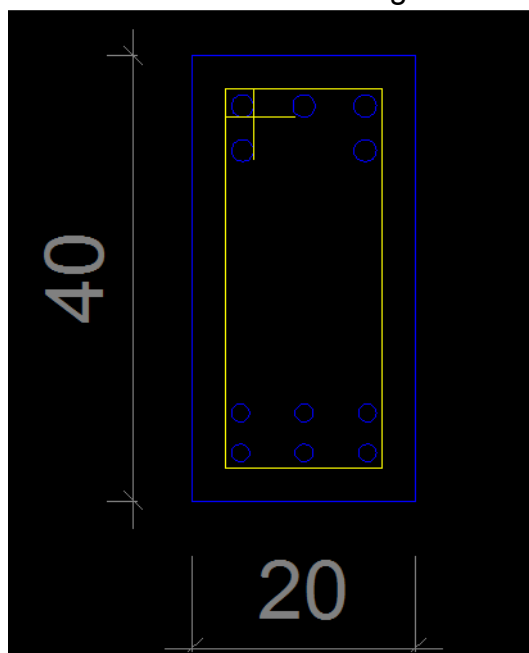
- No octave: Nos apoios com $A's = 5,42\text{cm}^2$ e $A_s=14,77\text{cm}^2$; e no centro com $A's=2,21\text{cm}^2$ e $A_s= 11,68\text{cm}^2$.
- No eberick: Nos apoios com $A's = 5,46\text{cm}^2$ e $A_s=14,72\text{cm}^2$; e no centro com $A's=2,43\text{cm}^2$ e $A_s= 11,69\text{cm}^2$.

Chegando praticamente a mesma área de aço, logo o detalhamento também é o mesmo, chegando a seguinte disposição:

- No centro: 6 barras de 16mm para a tração e 2 barras de 12,5mm para a compressão
- Nos apoios: 5 barras de 20mm para a tração e 3 barras de 16mm para a compressão.

Ficando a seção da seguinte maneira (com 6 barras de 16 embaixo e 5 barras de 20 em cima):

Figura 26 – Detalhamento da Viga 2 no eberick



Fonte: O próprio autor

A diferença observada entre as Figuras 25 e 26 é que a simples mudança da rótula para o engaste fez a viga permanecer com a seção de 20x40, e com pouca diferença na armadura longitudinal. Porém a viga engastada transfere momento ao pilar gerando a necessidade do aumento da armadura no mesmo. O dimensionamento dos lances dos pilares será mostrado a seguir.

2.3.3.3 Pilares

Para os pilares, foram definidas como base e largura da seção, 0,2 e 0,5 metros respectivamente, e 3 m de altura.

Para o dimensionamento dos pilares foram utilizados os esforços cortantes da viga transmitidos em forma de esforço normal ao pilar e o momento da viga engastada ao pilar do lance inferior.

Mesmo com a viga estando rotulada no pilar do lance superior, o esforço normal aplicado no pilar gera um momento por causa da sua excentricidade.

Como a distância entre as faces dos pilares é de 5,76m, e o vão efetivo da viga é de 6m, a distância da face do pilar ao ponto de aplicação do esforço considerado é de 12cm ($0,24/2=0,12\text{m}$), resultando em uma excentricidade de $0,25-0,12=0,13\text{m}$. O

esforço cortante de cálculo é tirado da matriz dos esforços da viga e utilizada no pilar multiplicando o valor do braço de alavanca provocado pela excentricidade dessa força.

O mesmo se repete para o lance inferior, e soma-se o momento negativo no apoio, que na viga engastada é de 179,46kN.m.

Com esses valores cria-se a matriz de rigidez do pilar e encontra-se, no octave para os momentos, os seguintes valores:

- 21,19 kN.m no topo do lance superior;
- 91,874 kN.m na base do lance superior;
- 108,367 kN.m no topo do lance inferior;
- 54,183 kN.m na base do lance inferior.

Para encontrar o momento resistente do pilar, através do método da flexão composta, encontram-se as parcelas resistentes com a aplicação da armadura e verifica-se novamente na posição 0,2h, que com 2 barras de 16 resulta em 115,52 kN.m, podendo usar a armadura para os dois lances ou até diminuir a seção para verificar. Ao diminuir para o diâmetro de 12,5mm encontra-se 90,382kN.m, que é menor que as duas parcelas logo deve-se utilizar mais uma barra de 12,5 mm resultando em 110,073 kN.m, cabendo ao projetista optar pela melhor escolha na armadura.

Logo 3 barras de 12,5mm dispostas em duas camadas (uma para a tração e uma para a compressão) é a área de aço usada para ambos os lances de pilares.

Também é necessária a verificação do índice de esbeltez, onde, são considerados os vãos efetivos dos pilares e deve ser calculado pela expressão: $\lambda = l_e / i$, com i sendo o raio de giração do pilar e representado pela fórmula $i = \sqrt{I/A}$, onde I é o momento de inercia e A , a área da seção transversal.

Segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014), os limites para os índices de esbeltez representam considerações de cálculos extras que devem ser efetuados caso os mesmos ultrapassem os limites estabelecidos pela norma.

E os pilares ainda devem ter índice de esbeltez menor ou igual a 200 ($\lambda \leq 200$). Apenas no caso de elementos pouco comprimidos com força normal menor que $0,10 f_{cd}A_c$, o índice de esbeltez pode ser maior que 200.

Para pilares retangulares, o λ (índice de esbeltez) é igual a $3,46 l_e/h$ (altura da seção do pilar).

O comprimento equivalente (l_e), é determinado através das condições de engastamento no topo e na base do pilar e definido segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014) por:

- $l_e=2.l$, para pilares engastados na base e livre no topo.
- $l_e=$ menor valor entre l ou $l_0 + h$, para as demais condições (item 15.6).

Onde:

- l_0 é a distância entre as faces internas dos elementos estruturais, supostos horizontais, que vinculam o pilar;
- h é a altura da seção transversal do pilar, medida no plano da estrutura em estudo;
- l é a distância entre os eixos dos elementos estruturais aos quais o pilar está vinculado. Deve-se verificar em quais direções o pilar está travado, por exemplo no pórtico no octave, (um pórtico 2D) não está sendo analisada, a dimensão z , pelo fato de se admitir que o pórtico seja rígido o suficiente para considerar a outra dimensão como restringida.

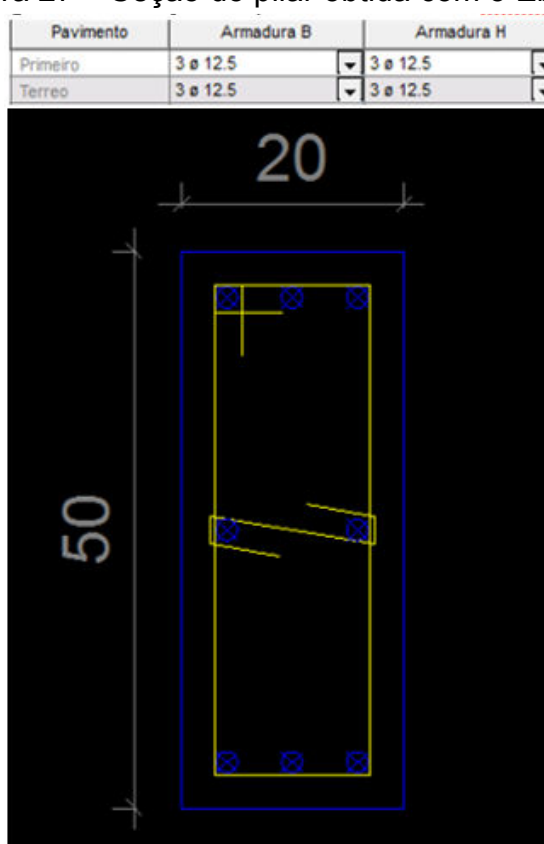
No pórtico do eberick, os cálculos são feitos em todas as dimensões, resultando como comprimento (l) os dois lances do pilar e resultando em um comprimento livre de 6m e um comprimento equivalente de 12m, logo o índice de esbeltez passa de 200. O eberick gera um aviso de esbeltez passando de 140 que o limite para o cálculo do programa.

Portanto, para obter os mesmos valores no pórtico 3D do eberick foram criadas restrições nos nós, para que o comprimento equivalente utilizado fosse menor. Resultando em índices de esbeltez de no máximo de 51,9 e referentes a menor dimensão, onde não há a aplicação de momentos. Para a dimensão de maior inercia o índice fica em 20,76, sendo o mesmo menor que 35 e dispensando qualquer análise de segunda ordem.

Outra solução é criar vigas para travar os pilares, fazendo com que sejam criados esforços na outra dimensão do pilar e que devem ser considerados nos cálculos gerando momentos fletores e esforços cortantes que também podem ser considerados aplicando o mesmo método para encontrar os esforços resistentes, só que com a dimensão b do pilar correspondendo a altura e h a base.

Porém como estes não geram esforços significantes nessa situação, o detalhamento do pilar no Eberick obteve a seguinte situação:

Figura 27 – Seção do pilar obtida com o Eberick



Fonte: O próprio autor

O Eberick pode fazer o uso de efeitos, como desaprumo, cargas de vento, imperfeições globais, etc, mas que foram considerados nulos para o cálculo para se obter as respostas devidas somente aos efeitos das solicitações.

Como observado na Figura 27, foram obtidas 3 barras de 12,5 mm por camada, mais as duas barras no centro, resultando na mesma resposta que a obtida com o octave.

O que comprova que os resultados obtidos com o Octave estão dentro de uma margem de segurança por serem mais elevados ou muito parecidos que os obtidos com o Eberick, porém podem ser aprimorados para se tornarem mais precisos.

Foi analisada uma estrutura simples, porém, conhecendo os princípios básicos que essa estrutura oferece é possível criar rotinas para cada estrutura em particular desde as mais simples até as mais complexas, garantindo resultados confiáveis e facilitando o trabalho do projetista ao encontrar os esforços e dimensionar a estrutura.

3 CONCLUSÃO

Nos dias de hoje, busca-se sempre a praticidade para realizar qualquer tarefa. Com a análise estrutural não é diferente, após o surgimento dos computadores, e dos métodos matriciais de análise foi possível criar códigos computacionais que analisam e obtêm os resultados dos esforços provocados devido a aplicação das cargas na estrutura, calculando a resistência que deve ser oferecida por uma estrutura a fim de resistir a esses esforços, bem como identificam e detalham a estrutura a ser construída.

Existindo essa facilidade e com os avanços tecnológicos nos computadores, através desse trabalho é possível criar um código que associa os cálculos com matrizes através do método dos deslocamentos dentro da análise estrutural com um comportamento bem próximo ao real de uma estrutura definindo as cargas, encontrando as reações, os esforços solicitantes, e também as deformações na estrutura.

Na primeira parte deste trabalho foram definidos os conceitos de matriz de rigidez de uma estrutura e também descritos os conceitos a respeito de sua utilização e aplicação dentro do método dos deslocamentos onde é possível realizar uma análise em qualquer estrutura.

Foram descritos os procedimentos para a montagem de uma matriz de rigidez local em uma estrutura como uma viga e sua utilização em um pórtico plano na criação de uma matriz de rigidez global, e sua posterior utilização em um software computacional.

Foi realizada uma análise em uma estrutura não linear, através da qual, usando o método dos elementos finitos e discretizando a estrutura continua identificaram-se as funções de forma para a montagem das matrizes de rigidez da estrutura, com o intuito de definir os esforços.

Então, usando o software GNU Octave, foi realizado esse procedimento criando rotinas de cálculo nas quais foram inseridos os dados e obtidos os resultados.

Elaborou-se uma rotina, inserindo os dados iniciais, e associando operações com matrizes, definindo esforços e encontrando as solicitações. Seguindo-se o procedimento de dimensionamento conforme a norma NBR 6118 para concreto armado e dimensionado um sistema de pórtico plano definindo as armaduras longitudinais das vigas e pilares da estrutura.

Utilizando aspectos da análise estrutural em operações com matrizes, juntamente com alguns aspectos referentes ao dimensionamento de estruturas, foram encontradas as melhores soluções para a armadura longitudinal dos elementos em questão, tais como: área de aço e dimensões para a seção de concreto.

Foi verificada também a diferença entre dois modelos de viga (uma engastada e outra rotulada), onde os resultados na área de aço e seção de concreto tiveram mudanças bem significativas.

Após concluída essa análise foi feita a comparação dos resultados obtidos no Octave 4.2.0 (2016), com os do software comercial Eberick v8 gold (2013), alcançando resultados muito semelhantes.

Chegando à conclusão de que o método matricial de análise é um método muito útil para sistemas estruturais, principalmente para os mais complexos, pois define os efeitos de um elemento no outro, e quanto mais elementos, mais eficaz é o método.

Assim, propõe-se aprimorar continuamente o método, para obter-se soluções cada vez mais eficazes e precisas.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6120**: Cargas para o cálculo de estruturas de edificações. Rio de Janeiro, 1980.

CARVALHO, Roberto Chust; FIGUEIREDO FILHO, Jasson Rodrigues de. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado**: segundo a NBR 6118:2014. 4.ed. São Carlos: Edufscar, 2015.

ALVES FILHO, Avelino. **Elementos finitos**: a base da tecnologia CAE. 6.ed. São Paulo: Érica, 2013.

ALVES FILHO, Avelino. **Elementos finitos**: a base da tecnologia CAE/ Análise dinâmica. São Paulo: Érica, 2005.

GNU Octave. **Linguagem de programação científica**/Sobre. Disponível em: <<http://www.gnu.org/software/octave/>>. Acesso em: 17 maio 2017.

Kadpro. **Eberick V9**: Estrutura em concreto armado. Disponível em: <<http://kadpro.com.br/produto/eberick/>>. Acesso em 08 nov. 2017.

LEET, Kenneth M; UANG, Chia-Ming; GIBERT, Anne M. **Fundamentos da análise estrutural**. 3.ed. Porto Alegre: AMGH, 2009.

MARTHA, Luis Fernando. **Análise de estruturas**: conceitos e métodos básicos. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.

MCCORMAC, Jack C. **Análise estrutural**: usando métodos clássicos e métodos matriciais. 4.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

MOREIRA, Domicio Falcão. **Análise matricial das estruturas**. Rio de Janeiro: LTC/EDUSP, 1977.

SARTURI, Francis Diego Moreto. **Simulação computacional de estruturas de concreto reforçadas com aço e compósitos de fibra de carbono**. 2014. 234 f. Dissertação. (Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia – Mecânica Computacional). Curso de Mestrado em Ciências. UFPR. Universidade Federal do Paraná. Curitiba.

SLIDESHARE. **Fundamentos de resistência dos materiais**. Disponível em: <<https://pt.slideshare.net/GustavoDominguesOliveira/cefetsc-apostila-resistenciadosmateriais>>. Acesso em: 05 abr. 2017.

SORIANO, Humberto Lima. **Estática das estruturas**. 4.ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2014.

YASIGI, Walid. **A técnica de edificar**. 10.ed. São Paulo: PINI: SindusCon, 2009.

VAZ, Luis Eloy. **Método dos Elementos Finitos Em Análise de Estruturas**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2011.